UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2023/1
Prova da área I

1-4	5	6	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \dfrac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \dfrac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\dfrac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \dfrac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N}\\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}\\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a hélice circular não uniforme dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + \pi^2 \ln(t)\vec{k}, \quad t > 0.$$

Marque a resposta correta para cada coluna.

Tangente unitário em $t = \pi$:

( ) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

( ) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

( ) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{\pi\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

( ) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

( ) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

Binormal unitário em $t = \pi$:

( ) $\vec{B}(\pi) = \dfrac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

( ) $\vec{B}(\pi) = \dfrac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

( ) $\vec{B}(\pi) = \dfrac{\pi\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

( ) $\vec{B}(\pi) = \dfrac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

( ) $\vec{B}(\pi) = \dfrac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

Curvatura em $t = \pi$:

( ) $\kappa(\pi) = \dfrac{2+\pi^2}{\pi}$

( ) $\kappa(\pi) = \dfrac{\sqrt{2+\pi^2}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

( ) $\kappa(\pi) = \dfrac{\sqrt{2+\pi^2}}{\sqrt{(1+\pi^2)^3}}$

( ) $\kappa(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$

( ) $\kappa(\pi) = \dfrac{2+\pi^2}{1+\pi^2}$

Torção em $t = \pi$:

( ) $\tau(\pi) = \dfrac{2+\pi^2}{\pi}$

( ) $\tau(\pi) = \dfrac{\sqrt{2+\pi^2}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

( ) $\tau(\pi) = \dfrac{\sqrt{2+\pi^2}}{\sqrt{(1+\pi^2)^3}}$

( ) $\tau(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$

( ) $\tau(\pi) = \dfrac{2+\pi^2}{1+\pi^2}$

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Uma mosca viaja sobre uma trajetória $\vec{r}(t)$ com velocidade $\vec{v}(t)$ e aceleração $\vec{a}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\operatorname{sen}(t)\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$. Sabendo que a velocidade da abelha no ponto $t = 0$ é $\vec{v}(0) = -\vec{j}$, marque a resposta correta para cada coluna.

Componente tangencial da aceleração: a_T

( ) $a_T = \dfrac{4 - 2\cos(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) $a_T = \dfrac{4 - 2\cos(t)}{\sqrt{(5 - 4\cos(t))^3}}$

( ) $a_T = \dfrac{2\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{(5 - 4\cos(t))^3}}$

( ) $a_T = \dfrac{8 + 2\operatorname{sen}(t) + 2\cos(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) $a_T = \dfrac{2\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) N.D.A

Componente normal da aceleração: a_N

( ) $a_N = \dfrac{4 - 2\cos(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) $a_N = \dfrac{4 - 2\cos(t)}{\sqrt{(5 - 4\cos(t))^3}}$

( ) $a_N = \dfrac{2\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{(5 - 4\cos(t))^3}}$

( ) $a_N = \dfrac{8 + 2\operatorname{sen}(t) + 2\cos(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) $a_N = \dfrac{2\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) N.D.A

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere a linha poligonal fechada C no plano xy formada pelos pontos $P_0(1,0,1)$, $P_1(3,0,1)$ e $P_2(2,1,1)$, no sentido $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0$, e o campo $\vec{F} = -(z^3+1)y\vec{i} + (z^2+1)x\vec{j} + xye^z\vec{k}$.

Rotacional

( ) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (xe^z - 2zx + e^z)\vec{i} - (3z^2y - ye^z + e^z + 1)\vec{j} + (z^3 + z^2 + 2)\vec{k}$

( ) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (xe^z - 2zx + e^z)\vec{i} - (3z^2y - ye^z + e^z)\vec{j} + (z^3 + z^2)\vec{k}$

( ) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (xe^z - 2zx)\vec{i} - (3z^2y - ye^z)\vec{j} + (z^3 + z^2 + 2)\vec{k}$

( ) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = xe^z\vec{i} - 3zy\vec{j} + (z^3 + z^2)\vec{k}$

( ) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = xe^z\vec{i} - 3e^z\vec{j} + 4\vec{k}$

Integral de linha

( ) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$

( ) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2$

( ) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4$

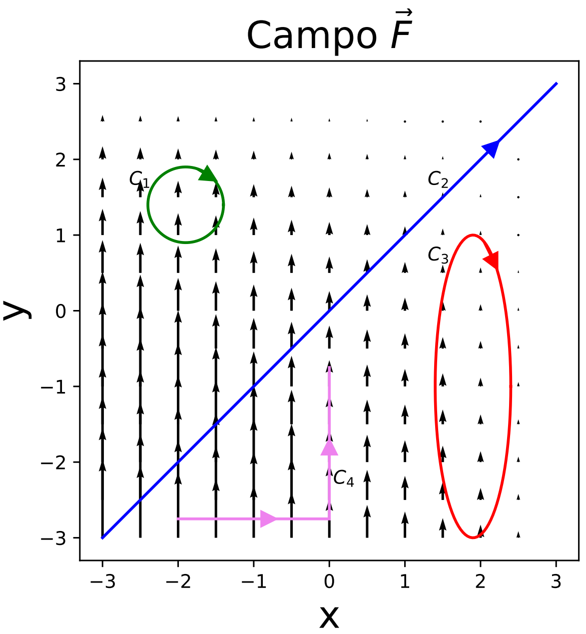
( ) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 8$

( ) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 16$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) A figura ao lado apresenta o corte $z = 0$ de um campo $\vec{F}(x, y) = F_2(x, y)\vec{j}$ e as seguintes quatro curvas orientadas: C_1 é um círculo, C_2 é um segmento de reta, C_3 é uma elipse e C_4 é a união de dois segmentos de reta. Considere também

- o plano S_1 dado por $x = 0$, $-2 \leq y \leq 2$, $-2 \leq z \leq 2$, orientado no sentido de $\vec{i}$.
- o plano S_2 dado por $y = 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq z \leq 2$, orientado no sentido de $-\vec{j}$.
- o plano S_3 dado por $z = 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, orientado no sentido de $-\vec{k}$.

Marque a resposta correta para cada coluna.



Integral de linha:

( ) $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$

( ) $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

( ) $\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

( ) $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$

( ) $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} > \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Integral de Superfície:

( ) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > 0$

( ) $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > 0$

( ) $\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0$

( ) $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0$

( ) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$

Curvatura:

( ) A curva C_3 possui somente dois valores para a curvatura.

( ) A curvatura é zero sobre C_1 e C_2.

( ) A curvatura não é constante para C_1 e C_3

( ) A curva C_4 tem dois valores para curvatura e um ponto onde a curvatura não está bem definida.

( ) A curvatura é zero sobre C_2 e sobre C_4, com exceção de um ponto sobre C_4.

Divergente:

( ) $\nabla \cdot \vec{F} > 0$ em todos os pontos.

( ) $\nabla \cdot \vec{F} > 0$ somente no primeiro quadrante.

( ) $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ somente no primeiro quadrante.

( ) $\nabla \cdot \vec{F} < 0$ em todos os pontos.

( ) $\nabla \cdot \vec{F} < 0$ no primeiro quadrante e $\nabla \cdot \vec{F} \geq 0$ no terceiro quadrante.

• **Questão 5** (1.0 ponto) Seja a curva no plano xy dada pela gráfico de uma função suficientemente diferenciável $f(x)$:

$$y = f(x).$$

Mostre que curvatura como função de x é dada pela expressão:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Empregue essa fórmula à função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\quad -1 \leq x \leq 1$ e interprete geometricamente.

- **Questão 6** (3.0 pontos) Considere a região V limitada lateralmente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, inferiormente por $z = 1$ e superiormente por $z = 2$. Sejam S a superfície que limita V orientada para fora e $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$

    a) (1.5 ponto) Calcule o fluxo via parametrização direta da superfície. (sem usar o teorema da divergência)

    b) (1.5 ponto) Calcule o fluxo via teorema da divergência.