UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2023/1
Prova da área I

1-4	5	6	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}$$
$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}$$
$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a hélice circular não uniforme dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + \pi^2 \ln(t)\vec{k}, \quad t > 0.$$

Marque a resposta correta para cada coluna.

Tangente unitário em $t = \pi$:

(X) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

( ) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

( ) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{\pi\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

( ) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

( ) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

Binormal unitário em $t = \pi$:

( ) $\vec{B}(\pi) = \dfrac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

( ) $\vec{B}(\pi) = \dfrac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

( ) $\vec{B}(\pi) = \dfrac{\pi\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

( ) $\vec{B}(\pi) = \dfrac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

(X) $\vec{B}(\pi) = \dfrac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}$

Curvatura em $t = \pi$:

( ) $\kappa(\pi) = \dfrac{2+\pi^2}{\pi}$

( ) $\kappa(\pi) = \dfrac{\sqrt{2+\pi^2}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

(X) $\kappa(\pi) = \dfrac{\sqrt{2+\pi^2}}{\sqrt{(1+\pi^2)^3}}$

( ) $\kappa(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$

( ) $\kappa(\pi) = \dfrac{2+\pi^2}{1+\pi^2}$

Torção em $t = \pi$:

( ) $\tau(\pi) = \dfrac{2+\pi^2}{\pi}$

( ) $\tau(\pi) = \dfrac{\sqrt{2+\pi^2}}{\sqrt{1+\pi^2}}$

( ) $\tau(\pi) = \dfrac{\sqrt{2+\pi^2}}{\sqrt{(1+\pi^2)^3}}$

(X) $\tau(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$

( ) $\tau(\pi) = \dfrac{2+\pi^2}{1+\pi^2}$

Solução:
Começamos pelas derivadas:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + \pi^2 \ln(t)\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -\text{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \frac{\pi^2}{t}\vec{k} \\
\vec{r}\,''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \text{sen}(t)\vec{j} - \frac{\pi^2}{t^2}\vec{k} \\
\vec{r}\,'''(t) &= \text{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + \frac{2\pi^2}{t^3}\vec{k}
\end{aligned}$$

Subsituímos em $t = \pi$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(\pi) &= -\vec{j} + \pi\vec{k} \\
\vec{r}\,''(\pi) &= \vec{i} - \vec{k} \\
\vec{r}\,'''(\pi) &= \vec{j} + \frac{2}{\pi}\vec{k}
\end{aligned}$$

Obs: Substituir os valores torna o processo de calcular produtos e normas muito mais simples. Por que as subsituições só podem ser feitas depois das derivadas?

$$\|\vec{r}\,'(\pi)\| = \sqrt{1+\pi^2},$$

$$\vec{r}\,'(\pi) \times \vec{r}\,''(\pi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & \pi \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1-0)\vec{i} + (\pi - 0)\vec{j} + (0-(-1))\vec{k} = \vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}$$

$$\|\vec{r}\,'(\pi) \times \vec{r}\,''(\pi)\| = \sqrt{1^2 + \pi^2 + 1^2} = \sqrt{2+\pi^2}$$

$$\vec{r}\,'(\pi) \times \vec{r}\,''(\pi) \cdot \vec{r}\,'''(\pi) = \pi + \frac{2}{\pi}$$

$$\vec{r}\,'(\pi) \times \vec{r}\,''(\pi) \times \vec{r}\,'(\pi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \pi & 1 \\ 0 & -1 & \pi \end{vmatrix} = (\pi^2 - (-1))\vec{i} + (0-\pi)\vec{j} + (-1+0)\vec{k} = (\pi^2+1)\vec{i} - \pi\vec{j} - \vec{k}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\kappa(\pi) &= \frac{\|\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)\|}{\|\vec{r}\,'(\pi)\|^3} = \frac{\sqrt{2+\pi^2}}{\sqrt{(1+\pi^2)^3}},\\
\tau(\pi) &= \frac{\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)\cdot\vec{r}\,'''(\pi)}{\|\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)\|^2} = \frac{\pi+\frac{2}{\pi}}{\sqrt{(2+\pi^2)^2}} = \frac{\pi+\frac{2}{\pi}}{2+\pi^2} = \frac{\pi^2+2}{\pi(2+\pi^2)} = \frac{1}{\pi},\\
\vec{T}(\pi) &= \frac{\vec{r}\,'(\pi)}{\|\vec{r}\,'(\pi)\|} = \frac{-\vec{j}+\pi\vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}},\\
\vec{B}(\pi) &= \frac{\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)}{\|\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)\|} = \frac{\vec{i}+\pi\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}.
\end{aligned}$$

Adicional: Embora não tenha sido pedido no problema, o vetor normal unitário é dado por:

$$\vec{N}(\pi) = \frac{\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)\times\vec{r}\,'(\pi)}{\|\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)\times\vec{r}\,'(\pi)\|} = \frac{(\pi^2+1)\vec{i}-\pi\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{\pi^4+3\pi^2+2}}.$$

Em que se usou:

$$\left\|\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)\times\vec{r}\,'(\pi)\right\| = \sqrt{1^2+\frac{2^2}{\pi^2}+1^2} = \sqrt{(\pi^2+1)^2+\pi^2+1} = \sqrt{\pi^4+3\pi^2+2}.$$

Verifique agora que o trio é, de fato, ortonormal, isto é, cada um dos três vetores tem normal 1 e $\vec{T}\cdot\vec{N} = \vec{N}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{T} = 0$.

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Uma mosca viaja sobre uma trajetória $\vec{r}(t)$ com velocidade $\vec{v}(t)$ e aceleração $\vec{a}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Sabendo que a velocidade da abelha no ponto $t = 0$ é $\vec{v}(0) = -\vec{j}$, marque a resposta correta para cada coluna.

Componente tangencial da aceleração: a_T

( ) $a_T = \dfrac{4 - 2\cos(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) $a_T = \dfrac{4 - 2\cos(t)}{\sqrt{(5 - 4\cos(t))^3}}$

( ) $a_T = \dfrac{2\,\mathrm{sen}(t)}{\sqrt{(5 - 4\cos(t))^3}}$

( ) $a_T = \dfrac{8 + 2\,\mathrm{sen}(t) + 2\cos(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

(X) $a_T = \dfrac{2\,\mathrm{sen}(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) $a_T = 0$

Componente normal da aceleração: a_N

(X) $a_N = \dfrac{4 - 2\cos(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) $a_N = \dfrac{4 - 2\cos(t)}{\sqrt{(5 - 4\cos(t))^3}}$

( ) $a_N = \dfrac{2\,\mathrm{sen}(t)}{\sqrt{(5 - 4\cos(t))^3}}$

( ) $a_N = \dfrac{8 + 2\,\mathrm{sen}(t) + 2\cos(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) $a_N = \dfrac{2\,\mathrm{sen}(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}$

( ) $a_N = 0$

Solução:

Usaremos as fórmulas: $a_N = \dfrac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{v}$ e $a_T = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v}$.

$$\vec{a}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = [2\,\mathrm{sen}(t) + C_1]\,\vec{i} + [-2\cos(t) + C_2]\,\vec{j} + C_3\vec{k}$$

Como $\vec{v}(0) = -\vec{j}$, temos

$$\vec{v}(t) = 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{i} + [1 - 2\cos(t)]\,\vec{j}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) \times \vec{v}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\cos(t) & 2\,\mathrm{sen}(t) & 0 \\ 2\,\mathrm{sen}(t) & 1 - 2\cos(t) & 0 \end{vmatrix} \\
&= (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + \left\{2\cos(t)[1 - 2\cos(t)] - 4\,\mathrm{sen}^2(t)\right\}\vec{k} \\
&= (2\cos(t) - 4)\vec{k}
\end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\|\vec{a}(t) \times \vec{v}(t)\| = |2\cos(t) - 4| = 4 - 2\cos(t).$$

A última igualdade é válida porque a função $2\cos(t)$ é assume valores entre -2 e 2, portanto $4 - 2\cos(t)$ assume valores entre 2 e 6.

Já a norma da velocidade é dada por:

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(t) + (1 - 2\cos(t)^2)} = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(t) + 1 - 4\cos(t) + 4\cos^2(t)} = \sqrt{5 - 4\cos(t)}$$

Finalmente temos:

$$\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 4\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) + 2\,\mathrm{sen}(t)(1 - 2\cos(t)) = 2\,\mathrm{sen}(t)$$

$$a_N = \frac{4 - 2\cos(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}.$$

$$a_T = \frac{2\,\mathrm{sen}(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}.$$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere a linha poligonal fechada C no plano xy formada pelos pontos $P_0(1,0,1)$, $P_1(3,0,1)$ e $P_2(2,1,1)$, no sentido $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0$, e o campo $\vec{F} = -(z^3+1)y\vec{i} + (z^2+1)x\vec{j} + xye^z\vec{k}$.

Rotacional

( ) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = (xe^z - 2zx + e^z)\vec{i} - (3z^2y - ye^z + e^z + 1)\vec{j} + (z^3+z^2+2)\vec{k}$

( ) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = (xe^z - 2zx + e^z)\vec{i} - (3z^2y - ye^z + e^z)\vec{j} + (z^3+z^2)\vec{k}$

(X) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = (xe^z - 2zx)\vec{i} - (3z^2y + ye^z)\vec{j} + (z^3+z^2+2)\vec{k}$

( ) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = xe^z\vec{i} - 3zy\vec{j} + (z^3+z^2)\vec{k}$

( ) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = xe^z\vec{i} - 3e^z\vec{j} + 4\vec{k}$

Integral de linha

( ) $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 1$

( ) $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2$

(X) $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 4$

( ) $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 8$

( ) $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 16$

Solução do item b:

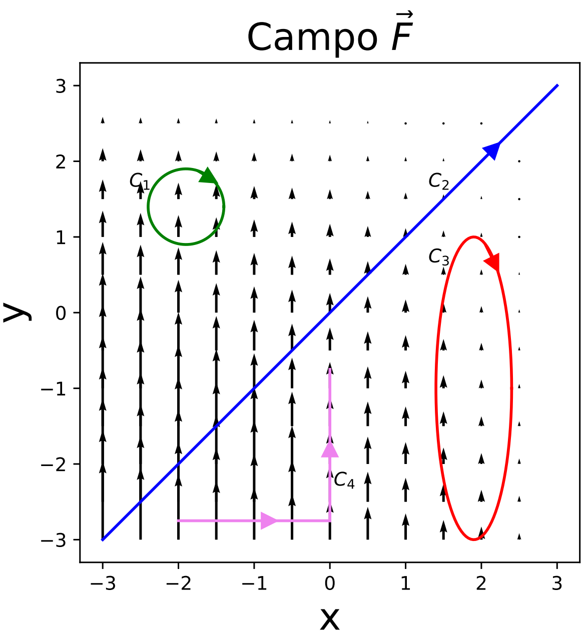
$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS \\
&= \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{k}dS \\
&= \iint_S \left(z^3+z^2+2\right)dS \\
&= \iint_S 4dS = 4
\end{aligned}$$

A região é um triângulo isóceles de base com comprimento 2 e altura 1, logo tem área 1.

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) A figura ao lado apresenta o corte $z=0$ de um campo $\vec{F}(x,y) = F_2(x,y)\vec{j}$ e as seguintes quatro curvas orientadas: C_1 é um círculo, C_2 é um segmento de reta, C_3 é uma elipse e C_4 é a união de dois segmentos de reta. Considere também

- o plano S_1 dado por $x=0$, $-2\le y\le 2$, $-2\le z\le 2$, orientado no sentido de $\vec{i}$.
- o plano S_2 dado por $y=0$, $-2\le x\le 2$, $-2\le z\le 2$, orientado no sentido de $-\vec{j}$.
- o plano S_3 dado por $z=0$, $-2\le x\le 2$, $-2\le y\le 2$, orientado no sentido de $-\vec{k}$.

Marque a resposta correta para cada coluna.



Integral de linha:

( ) $\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} < 0$

( ) $\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

( ) $\int_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

(X) $\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} > 0$

( ) $\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} > \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Integral de Superfície:

( ) $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}dS > 0$

( ) $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}dS > \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}dS > 0$

( ) $\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\vec{n}dS < 0$

(X) $\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}dS < 0$

( ) $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}dS > \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}dS = 0$

Curvatura:

( ) A curva C_3 possui somente dois valores para a curvatura.

( ) A curvatura é zero sobre C_1 e C_2.

( ) A curvatura não é constante para C_1 e C_3

( ) A curva C_4 tem dois valores para curvatura e um ponto onde a curvatura não está bem definida.

(X) A curvatura é zero sobre C_2 e sobre C_4, com exceção de um ponto sobre C_4.

Divergente:

( ) $\nabla\cdot\vec{F} > 0$ em todos os pontos.

( ) $\nabla\cdot\vec{F} > 0$ somente no primeiro quadrante.

( ) $\nabla\cdot\vec{F} = 0$ somente no primeiro quadrante.

(X) $\nabla\cdot\vec{F} < 0$ em todos os pontos.

( ) $\nabla\cdot\vec{F} < 0$ no primeiro quadrante e $\nabla\cdot\vec{F} \ge 0$ no terceiro quadrante.

• **Questão 5** (1.0 ponto) Seja a curva no plano xy dada pela gráfico de uma função suficientemente diferenciável $f(x)$:

$$y = f(x).$$

Mostre que curvatura como função de x é dada pela expressão:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Empregue essa fórmula à função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$ e interprete geometricamente.

Solução da primeira parte: Primeiro parametrização a curva com $x(t) = t$ e $y(t) = f(x(t)) = f(t)$:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}.$$

Depois calcumos as derivadas:

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'(t) &= \vec{i} + f'(t)\vec{j} \\ \vec{r}\,''(t) &= f''(t)\vec{j} \end{aligned}$$

Vemos que:

$$\begin{aligned} \left\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,'(t)\right\| &= \left\|\left(\vec{i} + f'(t)\vec{j}\right) \times f''(t)\vec{j}\right\| \\ &= \left\|f''(t)\vec{k}\right\| \\ &= |f''(t)| \end{aligned}$$

além disso:

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| = \left\|\vec{i} + f'(t)\vec{j}\right\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

Assim, basta substituir na fórmula para obter:

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

Retornando à variável original, temos:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

Solução da segunda parte:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - x^2\right)^{1/2} \\ f'(x) &= -x\left(1 - x^2\right)^{-1/2} = -\frac{x}{(1 - x^2)^{1/2}} \\ f''(x) &= -\left(1 - x^2\right)^{-1/2} + x^2\left(1 - x^2\right)^{-3/2} = -\frac{1}{(1 - x^2)^{-3/2}} \end{aligned}$$

Agora obtemos:

$$\left(1 + f'(x)^2\right)^{3/2} = \left(1 + \frac{x^2}{1 - x^2}\right)^{3/2} = \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} = (1 - x^2)^{-3/2}$$

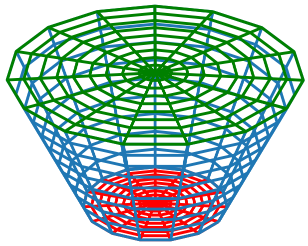
substituindo, temos $\kappa(x) = 1$. A intepretação geométrica é que a curva descrita é uma semicircunferência de raio 1.

• **Questão 6** (3.0 pontos) Considere a região V limitada lateralmente por $z = \sqrt{x^2+y^2}$, inferiormente por $z = 1$ e superiormente por $z = 2$. Sejam S a superfície que limita V orientada para fora e $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$

a) (1.5 ponto) Calcule o fluxo via parametrização direta da superfície. (sem usar o teorema da divergência)

b) (1.5 ponto) Calcule o fluxo via teorema da divergência.

Interepretação:



A região é um tronco de cone. A superfície, é então formada de três porções:
1. Inferiormente pelo círculo de raio 1 (S_b) com normal $\vec{\eta} = -\vec{k}$ e área π.
2. Superiormente pelo círculo de raio 2 (S_t) com normal $\vec{\eta} = \vec{k}$ e área 4π.
3. Lateralmente pela superfície cônica (S_l) com $\vec{\eta} \cdot \vec{k} < 0$.

Solução do item a:

$$G(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}, \quad \vec{\nabla}G(x,y,z) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{\nabla}G(x,y,z) &= -\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + z^2 \\ &= -\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + z^2 = -\sqrt{x^2+y^2} + \underbrace{x^2+y^2}_{\text{na superfície}} = -\rho + \rho^2\end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\Phi_l &= \iint_{S_l} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla}G dA = \iint_A \left(\rho - \rho^2\right) dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(\rho - \rho^2\right) \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_1^2 \left(\rho^2 - \rho^3\right) d\rho = -\frac{17}{6}\pi\end{aligned}$$

$$\Phi_t = \iint_{S_t} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_A \vec{F} \cdot \vec{k} dS = \iint_A z^2 dS = 4\iint_A dS = 16\pi$$

$$\Phi_b = \iint_{S_b} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_A \vec{F} \cdot (-\vec{k}) dS = -\iint_A z^2 dS = -\iint_A dS = -\pi$$

Somando os três termos, temos:

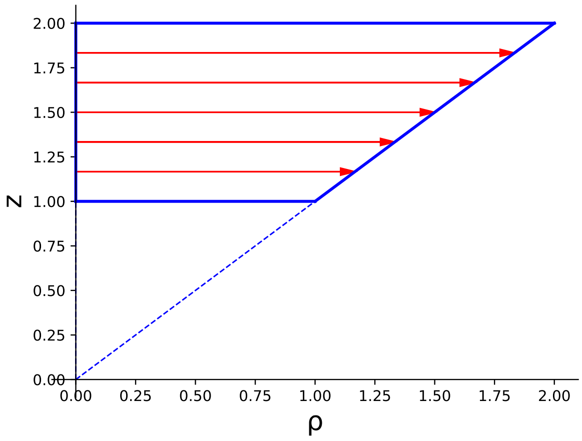
$$\Phi = -\frac{17}{6}\pi + 16\pi - \pi = \frac{73}{6}\pi$$

Solução do item b: Calculamos o divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2 + 2z$$

E realizamos a integral de volume:

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\vec{V} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^z (2+2z)\, \rho d\rho dz d\phi \\ &= 2\pi \int_1^2 (1+z)\, \rho^2\big|_0^z dz = 2\pi \int_1^2 (1+z)\, z^2 dz = \frac{73}{6}\pi\end{aligned}$$



Observação: A integral poderia ter sido feita (de forma mais trabalhosa) conforme a seguinte parametrização:

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}d\vec{V} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^2 (2+2z)\,\rho dz d\rho d\phi + \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_\rho^2 (2+2z)\,\rho dz d\rho d\phi \\
&= 2\pi\int_0^1 \left(2z+z^2\right)\Big|_1^2 \rho d\rho + 2\pi\int_1^2 \left(2z+z^2\right)\Big|_\rho^2 \rho d\rho \\
&= 10\pi\int_0^1 \rho d\rho + 2\pi\int_1^2 \left(8-2\rho-\rho^2\right)\rho d\rho \\
&= 5\pi + 2\pi\left(12-\frac{14}{3}-\frac{15}{4}\right) = \frac{73}{6}\pi
\end{aligned}
$$