UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2023/2
Prova da área I

1-2	3	4	Total

Nome: ____________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas (dissertativas)

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - -\left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + +\vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\\|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\\| = \left\\|\dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \dfrac{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|}{\\|\vec{r}\,'(t)\\|^3}$
Torção	$\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \dfrac{\left(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right)\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\\|\dfrac{d\vec{B}}{ds}\right\\| = \left\\|\dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\|$
Aceleração normal	$a_N = \dfrac{\\|\vec{a}\times\vec{v}\\|}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (0.6 ponto cada item) Considerando a trajetória parametrizada pela seguinte função vetorial:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + \cos(2t)\vec{k},\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

e a correspondente curva C, está correto:

(A) tangente unitário em $t = \frac{\pi}{4}$:

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

( ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) aceleração em $t = \frac{\pi}{4}$:

( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \vec{k}$

( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

( ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 4\vec{k}$

( ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 4\vec{k}$

( ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \vec{k}$

( ) nenhuma das anteriores

(C) curvatura em $t = \frac{\pi}{4}$:

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

( ) $\sqrt{5}$

( ) $\frac{1}{5}$

( ) 1

( ) nenhuma das anteriores

(D) torção em $t = \frac{\pi}{4}$:

( ) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

( ) $\frac{6}{5}$

( ) $-\frac{6}{\sqrt{5}}$

( ) $\frac{1}{5}$

( ) $\frac{6}{5\sqrt{5}}$

( ) nenhuma das anteriores

(E) aceleração normal em $t = \frac{\pi}{4}$:

( ) $\frac{1}{5}$

( ) 1

( ) $\sqrt{5}$

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

( ) 5

( ) nenhuma das anteriores

(F) aceleração tangencial em $t = \frac{\pi}{4}$:

( ) 0

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

( ) $\frac{1}{5}$

( ) 1

( ) $\frac{1}{5\sqrt{5}}$

( ) nenhuma das anteriores

(G) comprimento da curva C:

( ) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \text{sen}^2(2t)}dt$

( ) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \text{sen}^2(2t)\right)^{3/2} dt$

( ) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 4\,\text{sen}^2(2t)\right)^{3/2} dt$

( ) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\,\text{sen}(2t))dt$

( ) nenhuma das anteriores

• **Questão 2** (0.6 ponto cada item) Considerando a superfície parametrizada

$$\vec{r} = -4v\cos(u)\vec{i} + 3v\,\mathrm{sen}(u)\vec{j} + 4v\vec{k}, 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 2$$

no ponto em que $u = \dfrac{\pi}{2}$, $v = 1$, é correto:

(A) vetor normal unitário $\vec{N}$:

( ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} - \vec{k}\right)$

( ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{k}\right)$

( ) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\dfrac{1}{5}\left(4\vec{j} + 3\vec{k}\right)$

( ) $\dfrac{1}{5}\left(-4\vec{j} + 3\vec{k}\right)$

( ) nenhuma das anteriores

(B) equação cartesiana do plano tangente

( ) $4(y-3) - 3(z-4) = 0$

( ) $4(y-3) + 3(z-4) = 0$

( ) $(y-3) - (z-4) = 0$

( ) $(y-3) + (z-4) = 0$

( ) $(x-4) - (z-4) = 0$

( ) nenhuma das anteriores

(C) denominação mais adequada para a superfície toda:

( ) parabolóide elíptico

( ) parabolóide hiperbólico

( ) cone elíptico

( ) hiperbolóide de uma folha

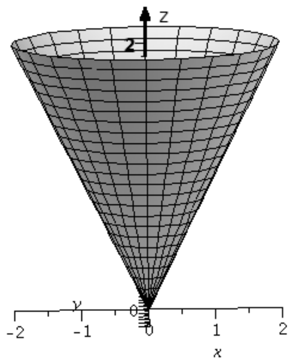
( ) hiperbolóide de duas folhas

( ) nenhuma das anteriores

• **Questão 3.** Seja o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (x-y)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (z-x)\vec{k}$. Seja S a superfície cônica representada ao lado (observe que $0 \le z \le 2$) e seja o disco $D = \{(x,y,2) : x^2 + y^2 \le 2^2\}$, orientado no sentido z positivo (como superfície). Observe que a união de S com D limita um sólido (volume) que denotaremos por G.

(a) (1.0pt) Obtenha o fluxo de $\vec{F}$ através do disco D.

(b) (1.0pt) Obtenha o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S depois de aplicar o Teorema do Divergente no volume G.



• **Questão 4.** Considere o campo vetorial $\vec{F} = (3yz^2 + z + 1)\vec{i} + 3xz^2\vec{j} + (6xyz + x)\vec{k}$ e a curva C dada por $\vec{r}(t) = \exp(t-1)\vec{i} + (t^2 + 2t)\vec{j} + t^4\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

(a)(0.5pt) Mostre que $\vec{F}$ é irrotacional.

(b)(0.5pt) Obtenha o potencial de $\vec{F}$, isto é, o campo escalar ϕ tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ ou justifique que não existe.

(c)(1.0pt) Obtenha o valor da integral de trabalho $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Bom Trabalho.