UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2023/2
Prova da área I

1-2	3	4	Total

Nome: Gabarito **Cartão:** ________________

- **Questão 1** Considerando a trajetória parametrizada pela seguinte função vetorial:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + \cos(2t)\vec{k},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

e a correspondente curva C, está correto:

(A) tangente unitário em $t = \frac{\pi}{4}$:

(X) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

( ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) aceleração em $t = \frac{\pi}{4}$:

( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \vec{k}$

( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

( ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 4\vec{k}$

( ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 4\vec{k}$

( ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \vec{k}$

(X) nenhuma das anteriores

Solução:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} - 2\operatorname{sen}(2t)\vec{k} \Rightarrow \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}$$

(a) $\left\|\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

(b) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\cos(t)\vec{i} - \operatorname{sen}(t)\vec{j} - 4\cos(2t)\vec{k} \Rightarrow \vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

(C) curvatura em $t = \frac{\pi}{4}$:

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

( ) $\sqrt{5}$

(X) $\frac{1}{5}$

( ) 1

( ) nenhuma das anteriores

(D) torção em $t = \frac{\pi}{4}$:

( ) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

(X) $\frac{6}{5}$

( ) $-\frac{6}{\sqrt{5}}$

( ) $\frac{1}{5}$

( ) $\frac{6}{5\sqrt{5}}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: $\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \operatorname{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + 8\operatorname{sen}(2t)\vec{k} \Rightarrow \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 8\vec{k}$

(c) $\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow\|\vec{v}\times\vec{a}\|=\sqrt{2+2+1}=\sqrt{5}\Rightarrow\kappa=\frac{\|\vec{v}\times\vec{a}\|}{v^3}=\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^3}=\frac{1}{5}$

(d) $\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}(-\sqrt{2})}{2}+1(8)=6\Rightarrow\tau=\frac{\vec{v}\times\vec{a}\cdot\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{v^2}=\frac{6}{(\sqrt{5})^2}=\frac{6}{5}$

(E) aceleração normal em $t=\frac{\pi}{4}$:

( ) $\frac{1}{5}$

(X) 1

( ) $\sqrt{5}$

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

( ) 5

( ) nenhuma das anteriores

(F) aceleração tangencial em $t=\frac{\pi}{4}$:

(X) 0

( ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

( ) $\frac{1}{5}$

( ) 1

( ) $\frac{1}{5\sqrt{5}}$

( ) nenhuma das anteriores

(G) comprimento da curva C:

( ) $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(2t)}dt$

( ) $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\operatorname{sen}^2(2t)\right)^{3/2}dt$

( ) $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+4\operatorname{sen}^2(2t)\right)^{3/2}dt$

( ) $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\operatorname{sen}(2t))dt$

(X) nenhuma das anteriores

Solução:

$a_N\left(\frac{\pi}{4}\right)=\kappa v^2=\frac{1}{5}(\sqrt{5})^2=1$, $a_T\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0}{\sqrt{5}}=0$

$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t)+4\operatorname{sen}^2(2t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2(2t)}dt$

• **Questão 2** Considerando a superfície parametrizada

$$\vec{r}=-4v\cos(u)\vec{i}+3v\operatorname{sen}(u)\vec{j}+4v\vec{k}, 0\leq u\leq 2\pi, 0\leq v\leq 2$$

no ponto em que $u=\frac{\pi}{2}$, $v=1$, é correto:

(A) vetor normal unitário $\vec{N}$:

(X) $\frac{1}{5}\left(-4\vec{j}+3\vec{k}\right)$

( ) $\frac{1}{5}\left(4\vec{j}+3\vec{k}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}-\vec{k}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)$

( ) nenhuma das anteriores

(B) equação cartesiana do plano tangente

(X) $4(y-3)-3(z-4)=0$

( ) $4(y-3)+3(z-4)=0$

( ) $(y-3)-(z-4)=0$

( ) $(y-3)+(z-4)=0$

( ) $(x-4)-(z-4)=0$

( ) nenhuma das anteriores

(C) denominação mais adequada para a superfície toda:

( ) parabolóide elíptico

( ) parabolóide hiperbólico

(X) cone elíptico

( ) hiperbolóide de uma folha

( ) hiperbolóide de duas folhas

( ) nenhuma das anteriores

Solução:

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=4v\operatorname{sen}(u)\vec{i}+3v\cos(u)\vec{j}\Rightarrow\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2},1\right)=4\vec{i}$

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=4\cos(u)\vec{i}+3\operatorname{sen}(u)\vec{j}+4\vec{k}\Rightarrow\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2},1\right)=3\vec{j}+4\vec{k}$

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=-16\vec{j}+12\vec{k}=4(-4\vec{j}+3\vec{k})\Rightarrow\vec{N}=\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}\left(-4\vec{j}+3\vec{k}\right)=\frac{1}{5}\left(-4\vec{j}+3\vec{k}\right)$

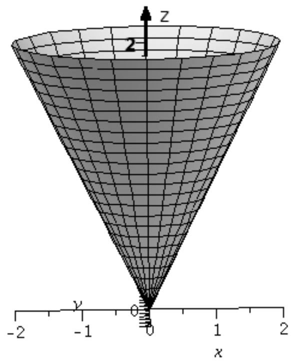
$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2},1\right)=3\vec{j}+4\vec{k}\Rightarrow P_0(0,3,4)$

equação do plano tangente: $0(x-0)-4(y-3)+3(z-4)=0\Leftrightarrow 4(y-3)-3(z-4)=0$

$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=v^2(\cos^2(u)+\text{sen}^2(u))=v^2=\dfrac{z^2}{4^2}$ :: trata-se de um cone elíptico com eixo principal OZ e vértice na origem

---

• **Questão 3.** Seja o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z)=(x-y)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(z-x)\vec{k}$. Seja S a superfície cônica representada ao lado (observe que $0\leq z\leq 2$) e seja o disco $D=\{(x,y,2):x^2+y^2\leq 2^2\}$, orientado no sentido z positivo (como superfície). Observe que a união de S com D limita um sólido (volume) que denotaremos por G.
(a) Obtenha o fluxo de $\vec{F}$ através do disco D.
(b) Obtenha o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S depois de aplicar o Teorema do Divergente no volume G.



Solução:
(a) No disco D temos $\vec{N}=\vec{k}$ e então $\vec{F}\cdot\vec{N}=z-x=2-x$

$$\iint_D \vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iint_D(2-x)dS=2\iint_D dS-\iint_D xdS=2(4)\pi-0=8\pi$$

uma vez que o integrando é ímpar e o disco D simétrico em relação a reta $x=0$.
(b) no sólido G: $\text{div}\vec{F}=1+1+1=3$ implica

$$\iint_{S\bigcup D}\vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iint_S\vec{F}\cdot\vec{N}dS+\iint_D\vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iiint_G(3)dV=3\frac{\pi 2^2(2)}{3}=8\pi$$

e portanto $\displaystyle\iint_S\vec{F}\cdot\vec{N}dS=8\pi-8\pi=0.$

• **Questão 4.** Considere o campo vetorial $\vec{F}=(3yz^2+z+1)\vec{i}+3xz^2\vec{j}+(6xyz+x)\vec{k}$ e a curva C dada por $\vec{r}(t)=\exp(t-1)\vec{i}+(t^2+2t)\vec{j}+t^4\vec{k}$, $0\leq t\leq 1$.
(a)(0.5pt) Mostre que $\vec{F}$ é irrotacional.
(b)(0.5pt) Obtenha o potencial de $\vec{F}$, isto é, o campo escalar ϕ tal que $\vec{F}=\vec{\nabla}\phi$ ou justifique que não existe.
(c)(1.0pt) Obtenha o valor da integral de trabalho $\displaystyle\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Solução:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{i}\left(\frac{\partial(6xyz+x)}{\partial y}-\frac{\partial(3xz^2)}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial(6xyz+x)}{\partial x}-\frac{\partial(3yz^2+z+1)}{\partial z}\right)+$$
$$\vec{k}\left(\frac{\partial(3xz^2)}{\partial x}-\frac{\partial(3yz^2+z+1)}{\partial y}\right)=\vec{i}(6xz-6xz)-\vec{j}(6yz+1-(6yz+1))+\vec{k}(3z^2-3z^2)=\vec{0}$$

o que comprova que o campo é irrotacional, e portanto conservativo segundo resultado estabelecido em aula.
Equacionando $\vec{F}=\vec{\nabla}\phi$:

$$\phi_x=3yz^2+z+1\Rightarrow\phi=3xyz^2+xz+x+q(y,z)$$
$$\phi_y=3xz^2+\frac{\partial q}{\partial y}=3xz^2\Rightarrow q(y,z)=p(z)$$
$$\phi_z=6xyz+x+p'(z)=6xyz+x\Rightarrow p(z)=C$$

e portanto $\phi=3xyz^2+xz+x$ salvo por constante aditiva.
Por outro lado, $\vec{r}(0)=e^{-1}\vec{i}$, $\vec{r}(1)=e^0\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ implica

$$\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(\vec{r}(1))-\phi(\vec{r}(0))=\phi(1,3,1)-\phi(e^{-1},0,0)=11-\frac{1}{e}$$

□