UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2023/2
Prova da área I

1	2	3	4	5	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\Vert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert}$
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}\,'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

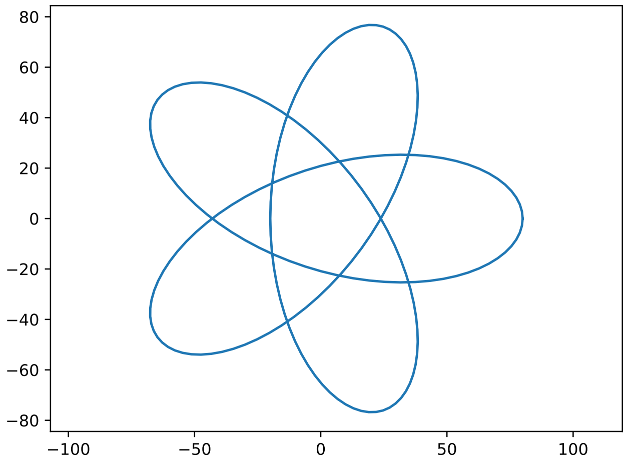
Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (3.0 pontos) A curva produzida pelas equações paramétricas

$$x(t) = 30\cos(t) + 50\cos\left(\frac{3}{2}t\right), \qquad y(t) = 30\,\mathrm{sen}(t) - 50\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}t\right),$$

$-2\pi \leq t \leq 2\pi$, é chamada de Hipotrocoide. Em uma apresentação de drift, o desafio do piloto é descrever o movimento da curva acima mantendo a velocidade do carro constante. É sabido que o carro pode sair da trajetória ou rodar na pista se a aceleração normal exceder $47\mathrm{m/s}^2$.



a) (0.5 ponto) Sem calcular, marque sobre a curva o(s) ponto(s) crítico(s) onde o carro pode sair da trajetória com maior facilidade.

b) (0.5 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ no ponto $t = 0$.

c) (0.5 ponto) Calcule o ponto t no intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ onde a curvatura é máxima. Assuma que a curva é simétrica pelo eixo x. Neste item, não é necessário calcular os pontos críticos derivando a função curvatura, mas justifique o resultado usando seus conhecimentos geométricos de curvatura, a simetria da figura ao lado e a expressão dada no enunciado.

d) (1.0 ponto) Calcule a curvatura da curva dada no ponto do item c).

e) (0.5 ponto) Calcule a velocidade máxima do carro para que o veículo não saia da trajetória no intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

- **Questão 2** (1.0 ponto) Calcule a função torção para a curva

$$\vec{r}(t) = \ln(t)\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j} + t\vec{k}, \qquad t > 0.$$

- **Questão 3** (2.0 pontos) Considere o campo **conservativo**

$$\vec{F} = (y-1)e^{x(y-1)}\vec{i} + xe^{x(y-1)}\vec{j} + 5\vec{k}$$

e a curva C dada pela parametrização

$$\vec{r} = t\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\vec{i} + 2t\cos(2\pi t)\vec{j} + 3t\cos(4\pi t)\vec{k}, \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

a) (1.0 ponto) Calcule o potencial.

b) (1.0 ponto) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

- **Questão 4** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = (4x^3 + y + e^z)\vec{i} + (4y^3 + x + z)\vec{j} + (4z^3 + e^x + e^y)\vec{k}$$

e a superfície fechada formada pelo hemisfério $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, limitada apenas ao primeiro octante, isto é, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, e os planos $x = 0$, $y = 0$, e $z = 0$, orientada para fora.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

• **Questão 5** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = (x - zy^2 + z)\vec{i} + (zx^2 + y - z)\vec{j} + (-x + y + z)\vec{k}$$

e a curva fechada formada pela poligonal formada pelos pontos $P_0 = (0, 0, 3)$, $P_1 = (4, 2, 3)$ e $P_2 = (4, 0, 3)$ no sentido $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0$.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$