UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2023/2
Prova da área I

1	2	3	4	5	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

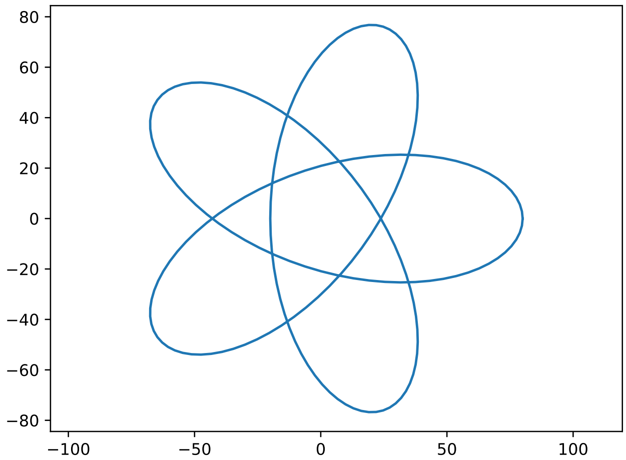
Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (3.0 pontos) A curva produzida pelas equações paramétricas

$$x(t) = 30\cos(t) + 50\cos\left(\frac{3}{2}t\right), \qquad y(t) = 30\,\mathrm{sen}(t) - 50\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}t\right),$$

$-2\pi \le t \le 2\pi$, é chamada de Hipotrocoide. Em uma apresentação de drift, o desafio do piloto é descrever o movimento da curva acima mantendo a velocidade do carro constante. É sabido que o carro pode sair da trajetória ou rodar na pista se a aceleração normal exceder $47\mathrm{m/s^2}$.



a) (0.5 ponto) Sem calcular, marque sobre a curva o(s) ponto(s) crítico(s) onde o carro pode sair da trajetória com maior facilidade.

b) (0.5 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ no ponto $t = 0$.

c) (0.5 ponto) Calcule o ponto t no intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ onde a curvatura é máxima. Assuma que a curva é simétrica pelo eixo x. Neste item, não é necessário calcular os pontos críticos derivando a função curvatura, mas justifique o resultado usando seus conhecimentos geométricos de curvatura, a simetria da figura ao lado e a expressão dada no enunciado.

d) (1.0 ponto) Calcule a curvatura da curva dada no ponto do item c).

e) (0.5 ponto) Calcule a velocidade máxima do carro para que o veículo não saia da trajetória no intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Solução:

a)

b) Dada a função vetorial

$$\vec{r}(t) = \left(30\cos(t) + 50\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\vec{i} + \left(30\,\mathrm{sen}(t) - 50\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\vec{j}$$

temos

$$\vec{r}'(t) = \left(-30\,\mathrm{sen}(t) - \frac{150}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\vec{i} + \left(30\cos(t) - \frac{150}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\vec{j}$$

Assim,

$$\vec{r}'(0) = \left(30 - \frac{150}{2}\right)\vec{j} = -\frac{90}{2}\vec{j} = -45\vec{j}.$$

Logo, $\vec{T}(0) = -\vec{j}$. Para calcular o vetor normal, procuramos vetores unitários ortogonais a $\vec{j}$ no plano xy, que podem ser $\vec{i}$ ou $-\vec{i}$. O ponto $\vec{r}(0) = 80\vec{i}$ está à direita de toda a curva, fazendo o vetor normal, que deve estar apontando para a parte interna da curva, ser $\vec{N}(0) = -\vec{i}$.

c) Começamos observando que $t = 0$ é o centro do intervalo $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$ e, $\vec{r}(0) = 80\vec{i}$. Assim, localizamos o pedaço da curva em questão. Logo, no intervalo $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$, o ponto onde a componente x é a maior é exatamente onde a curvatura é máxima. Observe que a figura é simétrica neste ponto. Assim, $x = 30\cos(t) + 50\cos\left(\frac{3}{2}t\right)$ é máximo quando $t = 0$.

d) Agora, vamos calcular a segunda derivada: e

$$\vec{r}''(t) = \left(-30\cos(t) - \frac{450}{4}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\vec{i} + \left(-30\,\mathrm{sen}(t) + \frac{450}{4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\vec{j}$$

Em $t = 0$, temos:

$$\vec{r}''(0) = \left(-30 - \frac{450}{4}\right)\vec{i} = -\frac{285}{2}\vec{i}$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = -\frac{45 \times 285}{2}\vec{k}$$

$$\|\vec{r}'(0)\| = 45$$

$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| = \frac{45 \times 285}{2}$$

$$\kappa(0) = \frac{\frac{45\times 285}{2}}{45^3} = \frac{285}{2 \times 45^2} = \frac{57}{810}$$

e) Como

$$a_N = v^2\kappa$$

temos

$$v^2 = \frac{a_N}{\kappa} = 47\frac{810}{57}$$

Logo,

$$v = \sqrt{\frac{38070}{57}}m/s$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Calcule a função torção para a curva

$$\vec{r}(t) = \ln(t)\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j} + t\vec{k}, \qquad t > 0.$$

Solução: Calculamos as derivadas

$$\vec{r}'(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{r}''(t) = -\frac{1}{t^2}\vec{i} + \vec{j},$$

$$\vec{r}'''(t) = \frac{2}{t^3}\vec{i}.$$

Fazemos,

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{t} & t & 1 \\ -\frac{1}{t^2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \frac{1}{t^2}\vec{j} + \frac{2}{t}\vec{k},$$

$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2 = 1 + \frac{1}{t^4} + \frac{4}{t^2}$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = -\frac{2}{t^3}.$$

$$\tau(t) = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2} = \frac{-\frac{2}{t^3}}{1 + \frac{1}{t^4} + \frac{4}{t^2}} = \frac{-2t}{t^4 + 1 + 4t^2}.$$

- **Questão 3** (2.0 pontos) Considere o campo **conservativo**

$$\vec{F} = (y-1)e^{x(y-1)}\vec{i} + xe^{x(y-1)}\vec{j} + 5\vec{k}$$

e a curva C dada pela parametrização

$$\vec{r} = t\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\vec{i} + 2t\cos(2\pi t)\vec{j} + 3t\cos(4\pi t)\vec{k}, \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

a) (1.0 ponto) Calcule o potencial.

b) (1.0 ponto) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução:

a) Observe que o potencial ϕ satisfaz

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (y-1)e^{x(y-1)}.$$

Ou seja,

$$\phi = e^{x(y-1)} + C_1(y,z).$$

Derivamos com respeito a y agora:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = xe^{x(y-1)} + \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = xe^{x(y-1)}.$$

Temos que

$$\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 0.$$

Logo $C_1(y,z) = C_2(z)$, ou seja, $\phi = e^{x(y-1)} + C_2(z)$. Finalizamos comparando a última derivada:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = 5.$$

Concluímos que $C_2(z) = 5z + C$, onde C é uma constante. Portanto, $\phi = e^{x(y-1)} + 5z + C$.

b) Vamos calcular o potencial usando o teorema fundamental para integral de linhas. Como sabemos que a curva C começa no ponto $\vec{r}(0) = P0(0,0,0)$ e termina no ponto $\vec{r}(1) = P1(0,4,6)$, temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(0,4,6) - \phi(0,0,0) = 1 + 30 - 1 = 30.$$

- **Questão 4** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = (4x^3 + y + e^z)\vec{i} + (4y^3 + x + z)\vec{j} + (4z^3 + e^x + e^y)\vec{k}$$

e a superfície fechada formada pelo hemisfério $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, limitada apenas ao primeiro octante, isto é, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, e os planos $x = 0$, $y = 0$, e $z = 0$, orientada para fora.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Solução:

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 12x^2 + 12y^2 + 12z^2 = 12(x^2 + y^2 + z^2)$.

b) Usando o teorema da divergência de Gauss, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\ &= \iiint_V 12(x^2 + y^2 + z^2) dV. \end{aligned}$$

Em coordenadas esféricas, temos $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Assim

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= 12 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= \frac{12\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\operatorname{sen}(\phi) \frac{\rho^5}{5} \right]_0^2 d\phi \\ &= 6\pi \frac{32}{5} \left[-\cos(\phi) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{192\pi}{5} \left[0 - (-1) \right] = \frac{192\pi}{5}. \end{aligned}$$

- **Questão 5** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = (x - zy^2 + z)\vec{i} + (zx^2 + y - z)\vec{j} + (-x + y + z)\vec{k}$$

e a curva fechada formada pela poligonal formada pelos pontos $P_0 = (0, 0, 3)$, $P_1 = (4, 2, 3)$ e $P_2 = (4, 0, 3)$ no sentido $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0$.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Solução:

a)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - zy^2 + z & zx^2 + y - z & -x + y + z \end{vmatrix} \\
&= (1 - (x^2 - 1))\vec{i} + (1 - y^2 - (-1))\vec{j} + (2zx - (-2zy))\vec{k} \\
&= (2 - x^2)\vec{i} + (2 - y^2)\vec{j} + 2z(x + y)\vec{k}.
\end{aligned}$$

b) Pelo teorema de Stokes, temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

onde S é o plano $z = 3$, limitado pelo triângulo do enunciado com orientação $\vec{n} = -\vec{k}$. Em $z = 3$, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (2 - x^2)\vec{i} + (2 - y^2)\vec{j} + 6(x + y)\vec{k}..$$

Também, $G = z - 3$ e $\vec{\nabla} G = \vec{k}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -6 \iint_S (x + y) dA \\
&= -6 \int_0^4 \int_0^{x/2} (x + y) dy dx \\
&= -6 \int_0^4 \left[(xy + \frac{y^2}{2}) \right]_0^{x/2} dx \\
&= -6 \int_0^4 \left[x \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^2}{2} \right] dx \\
&= -\int_0^4 \frac{15x^2}{4} dx \\
&= -\left[\frac{15x^3}{12} \right]_0^4 \\
&= -80.
\end{aligned}$$