UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2023/2
Prova da área I

1	2	3	4	5	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\\|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\\| = \left\\|\dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \dfrac{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|}{\\|\vec{r}\,'(t)\\|^3}$
Torção	$\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \dfrac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|^2}$
Módulo da Torção	$\|\tau\| = \left\\|\dfrac{d\vec{B}}{ds}\right\\| = \left\\|\dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\|$
Aceleração normal	$a_N = \dfrac{\\|\vec{a}\times\vec{v}\\|}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N} \end{aligned}$$

• **Questão 1** (3.0 pontos) A curva produzida pelas equações paramétricas

$$x(t) = 20\cos(3t), \qquad y(t) = 10\,\mathrm{sen}(2t), \quad -\pi \le t \le \pi,$$

é chamada de curva de Lissajous. Em uma apresentação de drift, o desafio do piloto é descrever o movimento da curva acima mantendo a velocidade do carro constante. É sabido que o carro pode sair da trajetória ou rodar na pista se a aceleração normal exceder 45m/s^2.

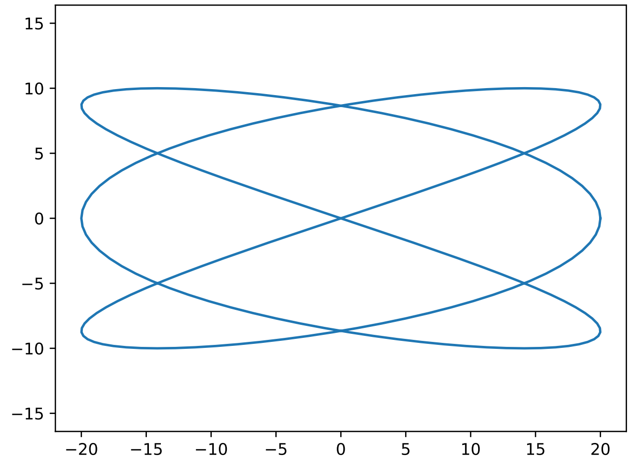
a) (0.5 ponto) Sem calcular, marque sobre a curva o(s) ponto(s) crítico(s) onde o carro pode sair da trajetória com maior facilidade.

b) (0.5 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ no ponto $t = \pi$.

c) (0.5 ponto) Calcule o ponto t no intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ onde a curvatura é máxima. Assuma que a curva é simétrica pelo eixo x. Neste item, não é necessário calcular os pontos críticos derivando a função curvatura, mas justifique o resultado usando seus conhecimentos geométricos de curvatura, a simetria da figura ao lado e a expressão dada no enunciado.

d) (1.0 ponto) Calcule a curvatura da curva dada no ponto do item c).

e) (0.5 ponto) Calcule a velocidade máxima do carro para que o veículo não saia da trajetória no intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.



Solução:

a)

b)

$$\vec{r}(t) = 20\cos(3t)\vec{i} + 10\,\mathrm{sen}(2t)\vec{j},$$

calculamos

$$\vec{r}\,'(t) = -60\,\mathrm{sen}(3t)\vec{i} + 20\cos(2t)\vec{j},$$

Assim,

$$\vec{r}\,'(\pi) = 20\vec{j},$$

Logo, $\vec{T}(\pi) = \vec{j}$. Para calcular o vetor normal, procuramos vetores ortogonais a $\vec{j}$ no plano xy, que podem ser $\vec{i}$ ou $-\vec{i}$. O ponto $\vec{r}(\pi) = -20\vec{i}$ está à esquerda de toda a curva, fazendo o vetor normal, que deve estar apontando para a parte interna da curva, ser $\vec{N}(\pi) = \vec{i}$.

c) Começamos observando que $t = 0$ é o centro do intervalo $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$ e, $\vec{r}(0) = 20\vec{i}$. Assim, localizamos o pedaço da curva em questão. Logo, no intervalo $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$, o ponto onde a componente x é a maior é exatamente onde a curvatura é máxima. Observe que a figura é simétrica neste ponto. Assim, $x = 20\cos(3t)$ é máximo quando $t = 0$.

d) Dada a função vetorial

$$\vec{r}(t) = 20\cos(3t)\vec{i} + 10\,\mathrm{sen}(2t)\vec{j},$$

calculamos

$$\vec{r}\,'(t) = -60\,\mathrm{sen}(3t)\vec{i} + 20\cos(2t)\vec{j},$$
$$\vec{r}\,''(t) = -180\cos(3t)\vec{i} - 40\,\mathrm{sen}(2t)\vec{j},$$

Em $t = 0$, temos

$$\vec{r}\,'(0) = 20\vec{j},$$
$$\vec{r}\,''(0) = -180\vec{i},$$
$$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = 3600\vec{k},$$
$$\|\vec{r}\,'(0)\| = 20,$$
$$\|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\| = 3600$$
$$k = \frac{3600}{20^3} = \frac{3600}{8000} = \frac{9}{20}.$$

e) Como

$$a_N = v^2\kappa$$

temos

$$v^2 = \frac{a_N}{\kappa} = 45\frac{20}{9} = 100$$

Logo,

$$v = 10m/s$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Calcule a função torção para a curva

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + \ln(t)\vec{k}, \qquad t > 0.$$

Solução: Calculamos as derivadas

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + \frac{1}{t}\vec{k},$$

$$\vec{r}''(t) = 2\vec{j} - \frac{1}{t^2}\vec{k},$$

$$\vec{r}'''(t) = \frac{2}{t^3}\vec{k}.$$

Fazemos,

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & \frac{1}{t} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{t^2} \end{vmatrix} = -\frac{4}{t}\vec{i} + \frac{1}{t^2}\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2 = \frac{16}{t^2} + \frac{1}{t^4} + 4$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = \frac{4}{t^3}.$$

$$\tau(t) = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2} = \frac{\frac{4}{t^3}}{\frac{16}{t^2} + \frac{1}{t^4} + 4} = \frac{4t}{16t^2 + 1 + 4t^4}.$$

- **Questão 3** (2.0 pontos) Considere o campo **conservativo**

$$\vec{F} = (y-1)e^{x(y-1)}\vec{i} + xe^{x(y-1)}\vec{j} + \vec{k}$$

e a curva C dada pela parametrização

$$\vec{r} = t\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\vec{i} + t\cos(2\pi t)\vec{j} + t\cos(4\pi t)\vec{k}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

a) (1.0 ponto) Calcule o potencial.

b) (1.0 ponto) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Solução:

a) Observe que o potencial ϕ satisfaz

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (y-1)e^{x(y-1)}.$$

Ou seja,

$$\phi = e^{x(y-1)} + C_1(y,z).$$

Derivamos com respeito a y agora:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = xe^{x(y-1)} + \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = xe^{x(y-1)}.$$

Temos que

$$\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 0.$$

Logo $C_1(y,z) = C_2(z)$, ou seja, $\phi = e^{x(y-1)} + C_2(z)$. Finalizamos comparando a última derivada:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = 1.$$

Concluímos que $C_2(z) = z + C$, onde C é uma constante. Portanto, $\phi = e^{x(y-1)} + z + C$.

b) Vamos calcular o potencial usando o teorema fundamental para integral de linhas. Como sabemos que a curva C começa no ponto $\vec{r}(0) = P0(0,0,0)$ e termina no ponto $\vec{r}(1) = P1(1,1,1)$, temos:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(1,1,1) - \phi(0,0,0) = 2 - 1 = 1.$$

- **Questão 4** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = x^3 z\vec{i} + y^3 z\vec{j} + z^2\vec{k}$$

e a superfície fechada formada pelo cone $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $2 \leq z \leq 4$ e o plano $z = 2$, $x^2 + y^2 \leq 4$, orientada para fora.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Solução:

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3zx^2 + 3zy^2 + 2z = z(3x^2 + 3y^2 + 2)$.

b) Usando o teorema da divergência de Gauss, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\ &= \iiint_V z(3x^2 + 3y^2 + 2) dV. \end{aligned}$$

Em coordenadas cilíndricas, o cone tem equação $z = 4 - r$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_2^{4-r} z(3r^2 + 2) r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^2 + 2) r \left[\frac{z^2}{2} \right]_2^{4-r} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^2 + 2) r \left[\frac{(4-r)^2 - 2^2}{2} \right] dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^3 + 2r) \left[\frac{12 - 8r + r^2}{2} \right] dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[\frac{36r^3 - 24r^4 + 3r^5 + 24r - 16r^2 + 2r^3}{2} \right] dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 \left[\frac{3r^5 - 24r^4 + 38r^3 - 16r^2 + 24r}{2} \right] dr \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} r^6 - \frac{24}{5} r^5 + \frac{19}{2} r^4 - \frac{16}{3} r^3 + 12r^2 \right]_0^2 \\ &= \pi \left[32 - \frac{768}{5} + 152 - \frac{128}{3} + 48 \right] \\ &= \frac{536\pi}{15}. \end{aligned}$$

- **Questão 5** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = (x - zy^2 + z)\vec{i} + (zx^2 + y - z)\vec{j} + (-x + y + z)\vec{k}$$

e a curva fechada formada pela poligonal formada pelos pontos $P_0 = (0,0,2)$, $P_1 = (4,0,2)$ e $P_2 = (4,2,2)$, no sentido $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0$.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Solução:

a)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - zy^2 + z & zx^2 + y - z & -x + y + z \end{vmatrix} \\
&= (1 - (x^2 - 1))\vec{i} + (1 - y^2 - (-1))\vec{j} + (2zx - (-2zy))\vec{k} \\
&= (2 - x^2)\vec{i} + (2 - y^2)\vec{j} + 2z(x + y)\vec{k}.
\end{aligned}$$

b) Pelo teorema de Stokes, temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

onde S é o plano $z = 2$, limitado pelo triângulo do enunciado com orientação $\vec{n} = \vec{k}$. Em $z = 2$, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (2 - x^2)\vec{i} + (2 - y^2)\vec{j} + 4(x + y)\vec{k}.$$

Também, $G = z - 2$ e $\vec{\nabla}G = \vec{k}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 4 \iint_S (x + y) dA \\
&= 4 \int_0^4 \int_0^{x/2} (x + y) dy dx \\
&= 4 \int_0^4 \left[(xy + \frac{y^2}{2}) \right]_0^{x/2} dx \\
&= 4 \int_0^4 \left[x \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^2}{2} \right] dx \\
&= \int_0^4 \frac{5x^2}{2} dx \\
&= \left[\frac{5x^3}{6} \right]_0^4 \\
&= \frac{160}{3}.
\end{aligned}$$