**UFRGS**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**MAT01168 - Turma D - 2023/2**
**Prova da área I**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Nome:** ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

| | |
|---|---|
| 1. | $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$ |
| 2. | $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$ |
| 3. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$ |
| 4. | $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$ |
| 5. | $\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$ |
| 6. | $\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$ |
| 7. | $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano |
| 8. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}f\right) = 0$ |
| 9. | $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$ |
| 10. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$ |
| 11. | $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$ |
| 12. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$ |
| 13. | $\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$ |
| 14. | $\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$ |

Curvatura, torção e aceleração:

| Nome | Fórmula |
|---|---|
| Vetor normal | $\vec{N} = \dfrac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)}{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)\\|}$ |
| Vetor binormal | $\vec{B} = \dfrac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\\|}$ |
| Curvatura | $\kappa = \left\\|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\\| = \left\\|\dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \dfrac{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\\|}{\\|\vec{r}\,'(t)\\|^3}$ |
| Torção | $\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \dfrac{(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\\|^2}$ |
| Módulo da Torção | $\lvert\tau\rvert = \left\\|\dfrac{d\vec{B}}{ds}\right\\| = \left\\|\dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\|$ |
| Aceleração normal | $a_N = \dfrac{\\|\vec{a} \times \vec{v}\\|}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$ |
| Aceleração tangencial | $a_T = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$ |

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (3.0 pontos) Um motoboy saiu de uma pizzaria para uma entrega na casa de um cliente ao longo de uma estrada descrita pela função vetorial

$$\vec{r}(t) = 10t\vec{i} + \frac{t^3}{30}\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

A pizzaria está localizada no ponto $(0,0)$ e o cliente no ponto final da trajetória medida em metros. Observe que o motoboy estava com pressa, percorrendo todo o trajeto desde a pizzaria até o ponto $P\left(100, \dfrac{1000}{30}\right)$ em apenas 10 segundos.

a) (0.5 ponto) Calcule a velocidade e a aceleração do motoboy em $t = 2$.

b) (0.5 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ em $t = 2$.

c) (1.0 ponto) Calcule as componentes normal e tangencial da aceleração em $t = 2$.

d) (1.0 ponto) Suponha que o motoboy voltou para a pizzaria pelo mesmo trajeto, mas agora com velocidade constante igual a 10m/s. Calcule as componentes normal e tangencial da aceleração no retorno para a pizzaria no mesmo ponto da curva onde o motoboy estava nos itens b), c) e d).

- **Questão 2** (1.0 ponto) Calcule a função torção para a curva

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{t^4}{4}\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k}, \qquad t > 0.$$

- **Questão 3** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (y + x)\vec{j} + z\vec{k}$$

e a curva $C$ dada pela parametrização

$$\vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + \operatorname{sen}(2t)\vec{k}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) (0.5 ponto) Verifique se o campo $\vec{F}$ é conservativo.

b) (1.5 ponto) Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

- **Questão 4** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = x^3 z^2 \vec{i} + y^3 z^2 \vec{j} + 2z^3 \vec{k}$$

e a superfície fechada formada pelo cubo formado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$, orientado para fora.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ .

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

- **Questão 5** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = (x - 2zy^2 + z)\vec{i} + (3zx^2 + y - z)\vec{j} + (-x + y + z)\vec{k}$$

e a curva fechada formada pela poligonal formada pelos pontos $P_0 = (0, 0, 1)$, $P_1 = (4, 2, 1)$ e $P_2 = (4, 0, 1)$ no sentido $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0$.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ .

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$