UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2024/1
Prova da área I

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{T}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert} = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right)\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{B}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert}$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (3.0 pontos) Considere a curva produzida pelas equações paramétricas

$$x(t) = 3\,\mathrm{sen}(4t) - 4\cos(t), \qquad y(t) = 2\cos(3t) + 4\,\mathrm{sen}(t),$$

$0 \leq t \leq 2\pi$. Sabrina se deparou com uma formiga andando sobre a mesa e, ao atacá-la com uma pano de prato, a formiga desesperadamente fugiu descrevendo a trajetória acima. A formiga percorreu toda a trajetória com velocidade constante igual a 5cm/s.

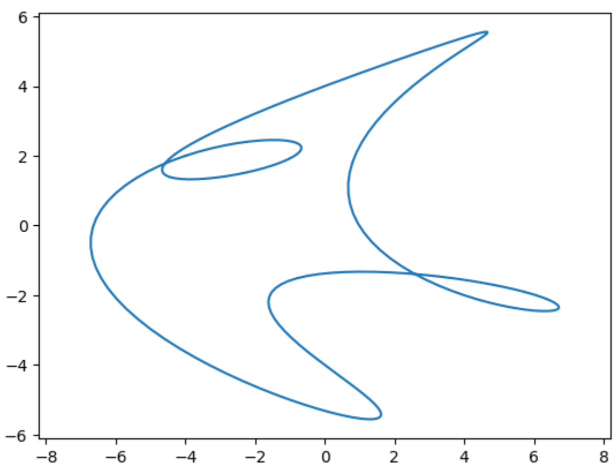
a) (1.0 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ em $t = 0$.

b) (0.25 ponto) Esboce no gráfico ao lado os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ em $t = 0$.

c) (0.25 ponto) Marque no gráfico ao lado os cinco pontos onde a função curvatura atinge os cinco maiores máximos locais.

d) (1.0 ponto) Calcule a curvatura em $t = 0$.

e) (0.5 ponto) Calcule a aceleração normal e a aceleração tangencial da formiga em $t = 0$.



• **Questão 2** (1.5 pontos) Considere a seguinte curva:

$$\vec{r} = \cos(t)\vec{i} + 3\,\mathrm{sen}(t)\vec{j} + c\,\mathrm{sen}(2t)\vec{k},$$

$0 \leq t \leq 2\pi$, $c > 0$.

a) (0.5 ponto) Calcule o valor de c sabendo que $v(0) = \|\vec{r}'(0)\| = 5$.

b) (1.0 ponto) Calcule a torção em $t = 0$.

• **Questão 3** (2.5 pontos) Considere os campos vetoriais

$$\vec{F} = (y^2 + e^x)\vec{i} + (2xy + e^y)\vec{j}$$

e

$$\vec{G} = (-y^2 + e^x)\vec{i} + (2xy + e^y)\vec{j}$$

e as curvas

$$C_1 : \vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

C_2 o segmento de reta que liga o pontos $P_0 = (0,1)$ até o ponto $P_1(0,0)$ no sentido $P_0 \to P_1$, C_3 o segmento de reta que liga o ponto $P_1 = (0,0)$ até o ponto $P_2(1,0)$ no sentido $P_1 \to P_2$ e $C_4 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

a) (0.5 ponto) Verifique se $\vec{F}$ é conservativo.

b) (0.5 ponto) Verifique se $\vec{G}$ é conservativo.

c) (0.75 ponto) Calcule $\displaystyle\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

d) (0.75 ponto) Calcule $\displaystyle\int_{C_4} \vec{G} \cdot d\vec{r}$.

• **Questão 4** (3.0 pontos) Seja S a superfície orientada para fora que limita o hemisfério de raio unitário centrado na origem ($x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$) e a porção de plano $z=0$ tal que $x^2+y^2 \leq 1$ e $\vec{F}$ o campo vetorial dado por $\vec{F} = (x^3+z^2+y)\vec{i} + (y^3+x^2+z)\vec{j} + (z^3+x)\vec{k}$.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

b) (1.0 ponto) Calcule $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ usando o Teorema da Divergência.

c) (0.75 ponto) Calcule $\displaystyle\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde D é o disco no plano $z=0$ limitado por $x^2+y^2 \leq 1$, orientado conforme enunciado.

d) (0.75 ponto) Use o resultado dos itens b) e c) para calcular $\displaystyle\iint_H \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde H é a superfície aberta $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, orientado conforme enunciado. Observe que $S = H \cup D$.