UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2024/1
Prova da área I

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \dfrac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)}{\lVert \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t) \rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \dfrac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{\lVert \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert \dfrac{d\vec{T}}{ds} \right\rVert = \left\lVert \dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\rVert = \dfrac{\left\lVert \frac{d\vec{T}}{dt} \right\rVert}{\left\lVert \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rVert} = \dfrac{\lVert \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \rVert}{\lVert \vec{r}\,'(t) \rVert^3}$
Torção	$\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \dfrac{(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\lVert \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert \dfrac{d\vec{B}}{ds} \right\rVert = \left\lVert \dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\rVert = \dfrac{\left\lVert \frac{d\vec{B}}{dt} \right\rVert}{\left\lVert \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rVert}$
Aceleração normal	$a_N = \dfrac{\lVert \vec{a} \times \vec{v} \rVert}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$

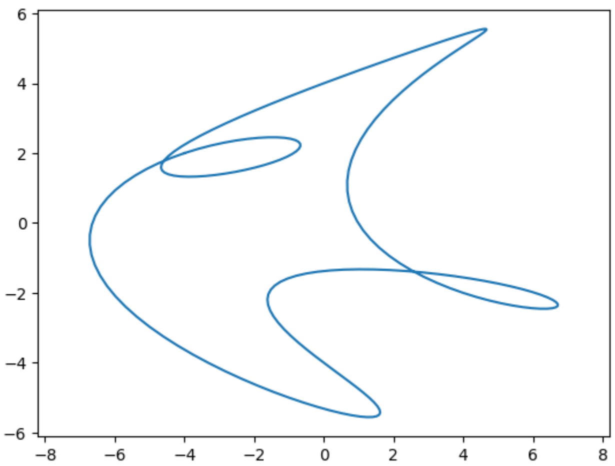
Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (3.0 pontos) Considere a curva produzida pelas equações paramétricas

$$x(t) = 3\,\text{sen}(4t) - 4\cos(t), \qquad y(t) = 2\cos(3t) + 4\,\text{sen}(t),$$

$0 \leq t \leq 2\pi$. Sabrina se deparou com uma formiga andando sobre a mesa e, ao atacá-la com uma pano de prato, a formiga desesperadamente fugiu descrevendo a trajetória acima. A formiga percorreu toda a trajetória com velocidade constante igual a 5cm/s.



a) (1.0 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ em $t = 0$.

b) (0.25 ponto) Esboce no gráfico ao lado os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ em $t = 0$.

c) (0.25 ponto) Marque no gráfico ao lado os cinco pontos onde a função curvatura atinge os cinco maiores máximos locais.

d) (1.0 ponto) Calcule a curvatura em $t = 0$.

e) (0.5 ponto) Calcule a aceleração normal e a aceleração tangencial da formiga em $t = 0$.

Solução

a) A posição da formiga é dada por

$$\vec{r}(t) = (3\,\text{sen}(4t) - 4\cos(t))\vec{i} + (2\cos(3t) + 4\,\text{sen}(t))\vec{j}.$$

Em $t = 0$, a posição é $\vec{r}(0) = -4\vec{i} + 2\vec{j}$. Temos:

$$\vec{r}'(t) = (12\cos(4t) + 4\,\text{sen}(t))\vec{i} + (-6\,\text{sen}(3t) + 4\cos(t))\vec{j}.$$

Logo,

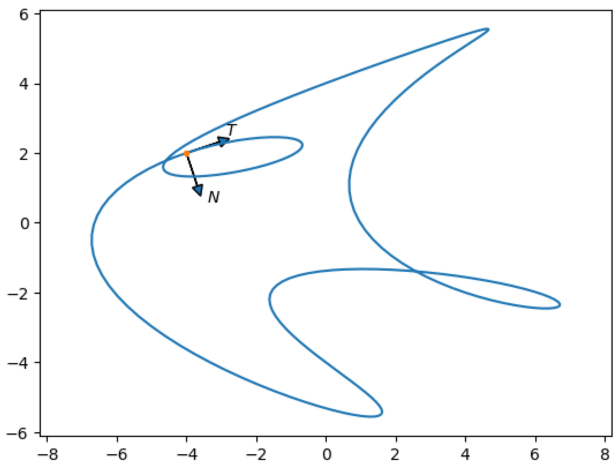
$$\vec{r}'(0) = 12\vec{i} + 4\vec{j}.$$

e

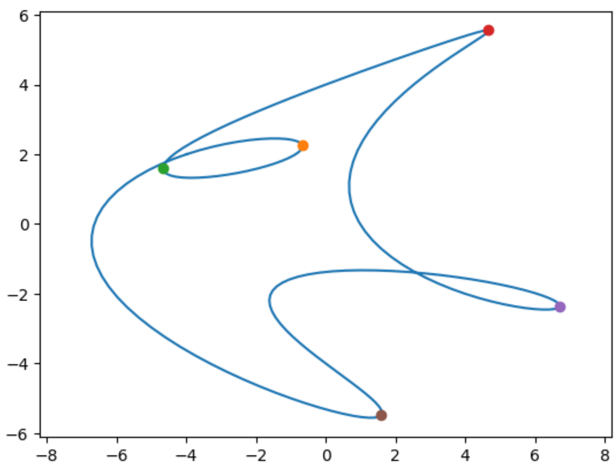
$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|} = \frac{12\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{144 + 16}} = \frac{12\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{160}} = \frac{3\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{10}}$$

Use a regra da mão direita na figura para concluir que em $t = 0$, $\vec{B} = -\vec{k}$. Assim,

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = (-\vec{k}) \times \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{j}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}$$



b)



c)

d) Calculamos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= (12\cos(4t) + 4\,\text{sen}(t))\vec{i} + (-6\,\text{sen}(3t) + 4\cos(t))\vec{j} \\
\vec{r}''(t) &= (-48\,\text{sen}(4t) + 4\cos(t))\vec{i} + (-18\cos(3t) - 4\,\text{sen}(t))\vec{j}
\end{aligned}$$

Em $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(0) &= 12\vec{i} + 4\vec{j}, \\
\vec{r}''(0) &= 4\vec{i} - 18\vec{j} \\
\|\vec{r}'(0)\| &= \sqrt{144+16} = 4\sqrt{10} \\
\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) &= (12\vec{i} + 4\vec{j}) \times (4\vec{i} - 18\vec{j}) = (-216 - 16)\vec{k} = -232\vec{k} \\
\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\| &= 232 \\
\kappa(0) &= \frac{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|}{\|\vec{r}'(0)\|^3} = \frac{232}{(4\sqrt{10})^3} = \frac{29}{80\sqrt{10}}
\end{aligned}$$

e) Sabemos que $a_T = v'$ e $a_N = \kappa v^2$. Como a velocidade é constante igual a 5cm/s, $a_T = 0$ e $a_N = 25\kappa$. Também, pelo item d), temos que $\kappa(0) = \dfrac{29}{80\sqrt{10}}$. Logo,

$$a_T = 25\frac{29}{80\sqrt{10}} = \frac{145}{16\sqrt{10}}$$

• **Questão 2** (1.5 pontos) Considere a seguinte curva:

$$\vec{r} = \cos(t)\vec{i} + 3\,\text{sen}(t)\vec{j} + c\,\text{sen}(2t)\vec{k},$$

$0 \leq t \leq 2\pi$, $c > 0$.

a) (0.5 ponto) Calcule o valor de c sabendo que $v(0) = \|\vec{r}'(0)\| = 5$.

b) (1.0 ponto) Calcule a torção em $t = 0$.

Solução:

a) Calculamos:

$$\vec{r}'(t) \quad = \quad -\,\text{sen}(t)\vec{i} + 3\cos(t)\vec{j} + 2c\cos(2t)\vec{k},$$

Em $t = 0$, temos:

$$\vec{r}'(0) \quad = \quad 3\vec{j} + 2c\vec{k},$$

Assim,

$$\|\vec{r}'(0)\| \quad = \quad \sqrt{9 + 4c^2} = 5,$$

Temos

$$9 + 4c^2 = 25 \Rightarrow 4c^2 = 16 \Rightarrow c = 2.$$

b) Calculamos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= -\,\text{sen}(t)\vec{i} + 3\cos(t)\vec{j} + 4\cos(2t)\vec{k} \\
\vec{r}''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - 3\,\text{sen}(t)\vec{j} - 8\,\text{sen}(2t)\vec{k} \\
\vec{r}'''(t) &= \text{sen}(t)\vec{i} - 3\cos(t)\vec{j} - 16\cos(2t)\vec{k}
\end{aligned}$$

Em $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(0) &= 3\vec{j} + 4\vec{k} \\
\vec{r}''(0) &= -\vec{i} \\
\vec{r}'''(0) &= -3\vec{j} - 16\vec{k}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) &= -4\vec{j} + 3\vec{k} \\
\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) \cdot \vec{r}'''(0) = 12 - 48 = -36 & \\
\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|^2 &= 25
\end{aligned}$$

Logo,

$$\tau = \frac{\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) \cdot \vec{r}'''(0)}{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|^2} = -\frac{36}{25}.$$

• **Questão 3** (2.5 pontos) Considere os campos vetoriais

$$\vec{F} = (y^2 + e^x)\vec{i} + (2xy + e^y)\vec{i}$$

e

$$\vec{G} = (-y^2 + e^x)\vec{i} + (2xy + e^y)\vec{i}$$

e as curvas

$$C_1 : \vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$$

C_2 o segmento de reta que liga o pontos $P_0 = (0,1)$ até o ponto $P_1(0,0)$ no sentido $P_0 \to P_1$, C_3 o segmento de reta que liga o ponto $P_1 = (0,0)$ até o ponto $P_1(1,0)$ no sentido $P_1 \to P_2$ e $C_4 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

a) (0.5 ponto) Verifique se $\vec{F}$ é conservativo.

b) (0.5 ponto) Verifique se $\vec{G}$ é conservativo.

c) (0.75 ponto) Calcule $\displaystyle\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

d) (0.75 ponto) Calcule $\displaystyle\int_{C_4} \vec{G} \cdot d\vec{r}$.

Solução:

a)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (y^2 + e^x) & (2xy + e^y) & 0 \end{vmatrix} = (2y - 2y)\vec{k} = \vec{0}.$$

Portanto, $\vec{F}$ é conservativo.

b) Verifique se $\vec{G}$ é conservativo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (-y^2 + e^x) & (2xy + e^y) & 0 \end{vmatrix} = (2y - (-2y))\vec{k} = 4y\vec{k}.$$

Portanto, $\vec{F}$ não é conservativo.

c) O potencial do campo $\vec{F}$ pode ser calculado comparando:

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = (y^2 + e^x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = (2xy + e^y).$$

Integramos o primeiro termos para obter $\phi(x,y) = xy^2 + e^x + C(y)$. Agora, derivamos a última expressão para calcular o valor de $C(y)$, isto é, $\dfrac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = 2xy + \dfrac{\partial C(y)}{\partial y} = 2xy + e^y$. Assim, temos $\dfrac{\partial C(y)}{\partial y} = e^y$ e, finalmente $C(y) = e^y + K$, onde K é uma constante. Portanto, $\phi(x,y) = xy^2 + e^x + e^y + K$.
Pelo Teorema Fundamental para Integral de Linhas, temos que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(0,1) - \phi(1,0) = (1 + e^1) - (1 + e^1) = 0.$$

d) Pelo teorema de Stokes

$$\int_{C_4} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{G} \cdot \vec{n} dS,$$

onde S é o plano $z = 0$ limitado pela curva fechada C_4 com vetor normal $\vec{n} = \vec{k}$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{C_4} \vec{G} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{G} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_S 4y\vec{k} \cdot \vec{k} dA \\ &= \iint_S 4y dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r\cos(\theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r^2 \cos(\theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{4r^3}{3} \cos(\theta) \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{4}{3} \left[\operatorname{sen}(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

• **Questão 4** (3.0 pontos) Seja S a superfície orientada para fora que limita o hemisfério de raio unitário centrado na origem ($x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$) e a porção de plano $z=0$ tal que $x^2+y^2 \leq 1$ e $\vec{F}$ o campo vetorial dado por $\vec{F} = (x^3+z^2+y)\vec{i} + (y^3+x^2+z)\vec{j} + (z^3+x)\vec{k}$.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

b) (1.0 ponto) Calcule $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ usando o Teorema da Divergência.

c) (0.75 ponto) Calcule $\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde D é o disco no plano $z=0$ limitado por $x^2+y^2 \leq 1$, orientado conforme enunciado.

d) (0.75 ponto) Use o resultado dos itens b) e c) para calcular $\iint_H \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde H é a superfície aberta $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, orientado conforme enunciado. Observe que $S = H \cup D$.

Solução:

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3(x^2+y^2+z^2)$.

b)

$$\begin{aligned}
\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \\
&= \iiint_V 3(x^2+y^2+z^2) dV \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) d\rho d\phi d\theta \\
&= 6\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^4 \operatorname{sen}(\phi) d\rho d\phi \\
&= 6\pi \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^5}{5} \operatorname{sen}(\phi) \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\phi \\
&= \frac{6\pi}{5} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\phi) d\phi \\
&= \frac{6\pi}{5} \left[-\cos(\phi) \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{6\pi}{5}.
\end{aligned}$$

c) A superfície $z=0$ está orientada com vetor normal $\vec{n} = -\vec{k}$. Também, em $z=0$, o campo é dado por

$$\vec{F} = (x^3+y)\vec{i} + (y^3+x^2)\vec{j} + x\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D ((x^3+y)\vec{i} + (y^3+x^2)\vec{j} + x\vec{k}) \cdot (-\vec{k}) dA \\
&= -\iint_D x dA \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 r\cos(\theta) r dr d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos(\theta) dr d\theta \\
&= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta \\
&= -\frac{1}{3} \left[\operatorname{sen}(\theta) \right]_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

d) Como

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_H \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

pelo itens anteriores, temos:

$$\iint_H \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS - \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \frac{6\pi}{5} - 0 = \frac{6\pi}{5}.$$