**UFRGS**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**MAT01168 - Turma A - 2024/2**
**Prova da área I**

| 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Nome:** ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

| | |
|---|---|
| 1. | $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$ |
| 2. | $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$ |
| 3. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$ |
| 4. | $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$ |
| 5. | $\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$ |
| 6. | $\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$ |
| 7. | $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano |
| 8. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$ |
| 9. | $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$ |
| 10. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$ |
| 11. | $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$ |
| 12. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$ |
| 13. | $\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$ |
| 14. | $\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$ |

Curvatura, torção e aceleração:

| Nome | Fórmula |
|---|---|
| Vetor normal | $\vec{N} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)}{\lVert\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)\rVert}$ |
| Vetor binormal | $\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\lVert\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\rVert}$ |
| Curvatura | $\kappa = \left\lVert \frac{d\vec{T}}{ds} \right\rVert = \left\lVert \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\rVert = \frac{\left\lVert \frac{d\vec{T}}{dt} \right\rVert}{\left\lVert \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rVert} = \frac{\lVert\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}'(t)\rVert^3}$ |
| Torção | $\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\lVert\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\rVert^2}$ |
| Módulo da Torção | $\lvert\tau\rvert = \left\lVert \frac{d\vec{B}}{ds} \right\rVert = \left\lVert \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\rVert = \frac{\left\lVert \frac{d\vec{B}}{dt} \right\rVert}{\left\lVert \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rVert}$ |
| Aceleração normal | $a_N = \frac{\lVert\vec{a} \times \vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$ |
| Aceleração tangencial | $a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$ |

Equações de Frenet-Serret:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}$$
$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}$$
$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$$

- **Questão 1** (3.5 pontos) Um automóvel se desloca sobre uma pista horizontal na forma da curva $y = e^x$, medido em quilômetros, $0 \leq x \leq 2$, no sentido positivo de $x$.

a) (1.0 ponto) Calcule a curvatura da curva em função de $x$.

b) (0.5 ponto) Calcule o valor máximo curvatura.

c) (0.5 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ em $x = 1$.

d) (0.75 ponto) Supondo que a aceleração em $x = 1$ é dada por $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, calcule as componentes normal e tangencial da aceleração nesse ponto. [*Dica: Observe que você não conhece o vetor velocidade em* $x = 1$.]

e) (0.75 ponto) Calcule a velocidade escalar máxima com que o automóvel pode percorrer a pista sem que sua aceleração normal supere $32\sqrt{3}\,km/h^2$.

**Questão 2** (2.0) Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = f(r)\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e $f(r)$ é uma função diferenciável.

a) (1.0) Calcule o rotacional e o divergente de $\vec{F}$.

b) (1.0) Para $f(r) = \text{senh}(r)$, calcule a circulação de $\vec{F}$ ao realizar uma volta ao longo da curva $C$ descrita pela equação

$$x^2 + y^2 = 4$$

orientada no sentido horário, isto é,

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}.$$

**Questão 3** (2.0 pontos) Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = -x^2y\vec{i} + (z^2 + y^2)\vec{j}$ ao longo do triângulo cujos vértices são $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ no sentido anti-horário.

**Questão 4** (2.5 pontos) Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1+z)\vec{k}$ e a superfície $S$ limitada inferiormente pelo plano $z = 1$ e superiormente pela superfície que satisfaz a equação

$$z = 2 - x^2 - y^2.$$

a) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para fora através de uma parametrização direta da superfície (sem usar o Teorema da Divergência).

b) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para fora através do Teorema da Divergência.

c) (0.5) Qual seria o valor do fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para dentro? Justifique sua resposta.