UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2024/2
Prova da área I

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{T}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert} = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{B}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert}$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (3.5 pontos) Um automóvel se desloca sobre uma pista horizontal na forma da curva $y = e^x$, medido em quilômetros, $0 \leq x \leq 2$, no sentido positivo de x.

a) (1.0 ponto) Calcule a curvatura da curva em função de x.

b) (0.5 ponto) Calcule o valor máximo curvatura.

c) (0.5 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ em $x = 1$.

d) (0.75 ponto) Supondo que a aceleração em $x = 1$ é dada por $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, calcule as componentes normal e tangencial da aceleração nesse ponto. [*Dica: Observe que você não conhece o vetor velocidade em $x = 1$.*]

e) (0.75 ponto) Calcule a velocidade escalar máxima com que o automóvel pode percorrer a pista sem que sua aceleração normal supere $32\sqrt{3}\,km/h^2$.

Solução a)
Considere a parametrização

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + e^t\vec{j},$$

$0 \leq t \leq 2$. Vamos calcular a curvatura usando a expressão

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

Temos:

$$r'(t) = \vec{i} + e^t\vec{j}$$
$$r''(t) = e^t\vec{j}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \end{vmatrix} \\ &= e^t\vec{k}. \end{aligned}$$

Agora calculamos

$$\|\vec{r}'(t)\| = \left(1 + e^{2t}\right)^{1/2}$$

Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} \\ &= \frac{e^t}{(1 + e^{2t})^{3/2}} \\ &= e^t\left(1 + e^{2t}\right)^{-3/2} \end{aligned}$$

Solução b) Observe que o ponto de curvatura máxima satisfaz $\kappa'(t) = 0$. Temos:

$$\kappa'(t) = -\frac{3}{2}e^t\left(1 + e^{2t}\right)^{-5/2} 2e^{2t} + e^t\left(1 + e^{2t}\right)^{-3/2} = 0.$$

Multiplicamos a equação acima por $\dfrac{\left(1 + e^{2t}\right)^{5/2}}{e^t}$ e obtemos:

$$-3e^{2t} + \left(1 + e^{2t}\right) = 0.$$

Logo,

$$2e^{2t} = 1.$$

ou seja,

$$t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Como, no ponto de curvatura máxima, temos $e^{2t} = \dfrac{1}{2}$ e $e^t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, a curvatura máxima é dada por:

$$\kappa_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Solução c) Começamos com os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ e depois calculamos $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$.

$$\vec{r}'(1) = \vec{i} + e\vec{j}$$

$$\|\vec{r}'(1)\| = \sqrt{1 + e^2}$$

$$\vec{r}''(1) = e\vec{j}$$

$$\vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1) = e\vec{k}$$

$$\vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1) \times \vec{r}'(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & e \\ 1 & e & 0 \end{vmatrix} = -e^2\vec{i} + e\vec{j}$$

$$\|\vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1) \times \vec{r}'(1)\| = \sqrt{e^4 + e^2} = e\sqrt{e^2 + 1}$$

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^2}}\left(\vec{i} + e\vec{j}\right)$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^2}}\left(-e\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Logo,

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} & \frac{e}{\sqrt{1+e^2}} & 0 \\ -\frac{e}{\sqrt{1+e^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}.$$

Solução d) Como $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} = a_T\vec{T} + A_N\vec{N}$, temos

$$\vec{a} \cdot \vec{T} = a_T$$

e

$$\vec{a} \cdot \vec{N} = a_N.$$

Portanto,

$$a_T = \vec{a} \cdot \vec{T} = (\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \frac{\vec{i} + e\vec{j}}{\sqrt{1+e^2}} = \frac{1+2e}{\sqrt{1+e^2}}$$

e

$$a_N = \vec{a} \cdot \vec{N} = (\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \frac{-e\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1+e^2}} = \frac{2-e}{\sqrt{1+e^2}}$$

Solução e) Sabemos que $a_N = \kappa v^2$, pelo que a aceleração normal é máxima quando a curvatura é máxima, ou seja, $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, daí temos:

$$v = \sqrt{\frac{a_N}{\kappa}} = \sqrt{32\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}} = 12km/h$$

Questão 2 (2.0) Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = f(r)\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $f(r)$ é uma função diferenciável.

a) (1.0) Calcule o rotacional e o divergente de $\vec{F}$.

b) (1.0) Para $f(r) = \text{senh}(r)$, calcule a circulação de $\vec{F}$ ao realizar uma volta ao longo da curva C descrita pela equação

$$x^2 + y^2 = 4$$

orientada no sentido horário, isto é,

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}.$$

Solução a)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (f(r)\vec{r}) &\overset{TAB(6)}{=} \left(\vec{\nabla} f(r)\right) \times \vec{r} + f(r)\left(\vec{\nabla} \times \vec{r}\right) \\
&= \left(f'(r)\hat{r}\right) \times \vec{r} + f(r)(\vec{0}) = \vec{0},
\end{aligned}$$

onde usou-se a identidade $\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\hat{r}$, o fato que $\vec{r} \times \hat{r} = \vec{0}$ (pois são paralelos) e

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{j} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (f(r)\vec{r}) &\overset{TAB(5)}{=} \left(\vec{\nabla} f(r)\right) \cdot \vec{r} + f(r)\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right) \\
&= \left(f'(r)\hat{r}\right) \cdot \vec{r} + f(r)(3) = rf'(r) + 3f(r)
\end{aligned}$$

Onde mais uma vez usou-se a identidade $\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\hat{r}$, o fato que $\vec{r} \cdot \hat{r} = \vec{r} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{r^2}{r} = r$, e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Solução b)

A curva é uma circunferência de raio 3 e, logo, uma curva fechada. Como $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, $\vec{F}$ é conservativo e, portanto, a circulação é zero.

Questão 3 (2.0 pontos) Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = -x^2y\vec{i} + (z^2 + y^2)\vec{j}$ ao longo do triângulo cujos vértices são $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ no sentido anti-horário.

Solução

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \int_0^1 \int_0^{1-x} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dy dx$$

Agora, precisamos calcular $\vec{\nabla} \times \vec{F}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -x^2y & z^2 + y^2 & 0 \end{vmatrix} = -2z\vec{i} + x^2\vec{k}.$$

Logo, temos $\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} = x^2$ e, finalmente,

$$W = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 dy dx = \int_0^1 x^2(1-x) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Questão 4 (2.5 pontos) Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1+z)\vec{k}$ e a superfície S limitada inferiormente pelo plano $z = 1$ e superiormente pela superfície que satisfaz a equação

$$z = 2 - x^2 - y^2.$$

a) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para fora através de uma parametrização direta da superfície (sem usar o Teorema da Divergência).

b) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para fora através do Teorema da Divergência.

c) (0.5) Qual seria o valor do fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para dentro? Justifique sua resposta.

Solução a)
Começamos com o fluxo atravé do parabolóide, que denotaremos por S_1. Temos

$$G(x, y, z) = z - 2 + x^2 + y^2,$$

e

$$\vec{\nabla} G(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}.$$

Como a orientação para fora tem componente $\vec{k}$ positiva, o sentido do gradiente está correto. Agora, colocamos o campo sobre a superfície

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x, y, 2 - x^2 - y^2) = x\vec{i} + y\vec{j} + (3 - x^2 - y^2)\vec{k}$$

O integrando tem a forma

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 3 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 + 3$$

Assim, usando coordenadas cilíndricas, temos

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2 + 3) r d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 + 3) r d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^1 (r^3 + 3r) dr = 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) = \frac{7}{2}\pi
\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular o fluxo pela base $z = 1$, que denotaremos por S_2. Nesse caso, $G = z - 1$ e $\vec{\nabla} G = \vec{k}$. Como $\vec{n}$ aponta para baixo, usamos sinal de menos na integração. Também, em $z = 1$, temos $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= -\iint_R \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA \\
&= -\iint_R (x\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot \vec{k} dA \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r d\theta dr \\
&= -2\pi \left[r^2 \right]_0^1 = -2\pi.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = -2\pi + \frac{7\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Solução b) Começamos calculando o divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3$$

Agora, pelo Teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iiint_V 3 dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_1^{2-r^2} 3\ r dz d\theta dr \\
&= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2) r d\theta dr \\
&= 6\pi \int_0^1 (r - r^3) dr \\
&= 6\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\
&= 6\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Solução c) A definição de integral de superfície tem $\vec{F} \cdot \vec{n}$ no integrando. Se trocar $\vec{n}$ por $-\vec{n}$, o resultado troca de sinal. Logo, o resultado seria $-\dfrac{3\pi}{2}$.