UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma B - 2024/2
Prova da área I

1	2	3	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas (dissertativas)

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado. Respostas corretas mas sem justificativa receberão apenas 33% da pontuação.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = G \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - F \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d\vec{r}}{dt}}{\left\Vert \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\Vert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left\Vert \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\Vert}$
Curvatura	$\kappa = \left\Vert \frac{d\vec{T}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert = \frac{\Vert \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Vert}{\Vert \frac{d\vec{r}}{dt} \Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\Vert \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert \frac{d\vec{B}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert \vec{a} \times \vec{v} \Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

Questão 1 (0.7pt cada item) Sobre a trajetória parametrizada pela função vetorial

$$\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{2\sqrt{2}}{5}t^{\frac{5}{2}}\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k}, \quad t \geq 0,$$

está correto:

(A) tangente unitário $\vec{T}$ em $t = 2$:

( ) $2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + 3\sqrt{2}\ \vec{j} + 4\vec{k}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{5}$

( ) $\dfrac{2\vec{i} + 3\sqrt{2}\ \vec{j} + 4\vec{k}}{9}$

( ) $\dfrac{2\vec{i} + 3\sqrt{2}\ \vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{38}}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) aceleração $\vec{a}(t)$ em $t = 2$:

( ) $2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$

( ) $\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + 3\sqrt{2}\ \vec{j} + 4\vec{k}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{26}}$

( ) $\vec{i} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 2\vec{k}$

( ) nenhuma das anteriores

(C) vetor normal unitário $\vec{N}(t)$ em $t = 2$:

( ) $\dfrac{\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{26}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{-2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{-\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) nenhuma das anteriores

(D) vetor binormal $\vec{B}(t)$ em $t = 2$:

( ) $\dfrac{2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{-\vec{i} + \vec{k}}{2}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}}{2}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}}{2 + \sqrt{2}}$

( ) nenhuma das anteriores

(E) curvatura em $t = 2$:

( ) 1

( ) $\dfrac{1}{6}$

( ) $\dfrac{1}{36}$

( ) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

( ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

( ) nenhuma das anteriores

(F) torção em $t = 2$:

( ) $\tau = \dfrac{9 - 6\sqrt{2}}{502 - 324\sqrt{2}}$

( ) $\tau = \dfrac{1}{36}$

( ) $\tau = -\dfrac{5}{6}$

( ) $\tau = \dfrac{1}{10}$

( ) $\tau = \dfrac{1}{100}$

( ) nenhuma das anteriores

(G) aceleração tangencial em $t = 2$:

( ) 0

( ) 5

( ) 3

( ) $\dfrac{6}{2+\sqrt{2}}$

( ) 1

( ) nenhuma das anteriores

(H) aceleração normal em $t = 2$:

( ) 1

( ) 0

( ) $\dfrac{5}{4}$

( ) $\dfrac{502-324\sqrt{2}}{6}$

( ) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

( ) nenhuma das anteriores

Questão 2 Considere a superfície parametrizada (guarda-chuva de Whitney) $\vec{r} = uv\vec{i} + u\vec{j} + v^2\vec{k}$. No ponto em que $u = 8$, $v = 3$:
(A) (0.7pt) obtenha o vetor normal unitário $\vec{N}$.
(B) (0.7pt) obtenha uma equação cartesiana do plano tangente.

Há questões na página seguinte.

Questão 3. Considere o campo vetorial radial dado por $\vec{F} = \exp(2 - r)\vec{r}$, a superfície esférica $S_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 3^2\}$, e seu normal unitário de superfície $\vec{N}$ orientado para fora.

(A) (1.0pt) Determine se $\vec{F}$ é um campo conservativo indicando, se existir, o respectivo potencial radial $g(r)$ nulo na origem.

(B) (1.0pt) Determine o divergente de $\vec{F}$.

(C) (1.0pt) Calcule o fluxo $\displaystyle\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{N} dS$.

Bom Trabalho.