UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma B - 2024/2
Prova da área I

1	2	3	Total

Nome: gabarito A ______________________________ **Cartão:** ______________

Questão 1 Sobre a trajetória parametrizada pela função vetorial

$$\vec r(t) = \frac{t^2}{2}\vec i + \frac{2\sqrt2}{5}t^{\frac52}\vec j + \frac{t^3}{3}\vec k, \quad t \ge 0,$$

está correto:

(A) tang. unit. $\vec T$ em $t=2$:

( ) $2\vec i + 4\vec j + 4\vec k$

( ) $2\vec i + 3\sqrt2\,\vec j + 4\vec k$

( ) $\dfrac{\vec i + 2\vec j + 2\vec k}{5}$

( ) $\dfrac{2\vec i + 3\sqrt2\,\vec j + 4\vec k}{9}$

( ) $\dfrac{2\vec i + 3\sqrt2\,\vec j + 4\vec k}{\sqrt{38}}$

(X) nenhuma das anteriores

(B) aceleração $\vec a(t)$ em $t=2$:

( ) $2\vec i + 4\vec j + 4\vec k$

(X) $\vec i + 3\vec j + 4\vec k$

( ) $2\vec i + 3\sqrt2\,\vec j + 4\vec k$

( ) $\dfrac{\vec i + 3\vec j + 4\vec k}{\sqrt{26}}$

( ) $\vec i + \dfrac{3\sqrt2}{2}\vec j + 2\vec k$

( ) nenhuma das anteriores

Solução:

$\dfrac{d\vec r}{dt} = t\vec i + \sqrt2 t^{\frac32}\vec j + t^2\vec k \quad \overset{t=2}{\Longrightarrow} \vec v = 2\vec i + 4\vec j + 4\vec k$

$\dfrac{d^2\vec r}{dt^2} = \vec i + \dfrac{3}{\sqrt2}t^{\frac12}\vec j + 2t\vec k \quad \overset{t=2}{\Longrightarrow} \vec a = \vec i + 3\vec j + 4\vec k$

$\dfrac{d^3\vec r}{dt^3} = \dfrac{3}{2\sqrt2}t^{\frac{-1}{2}}\vec j + 2\vec k \quad \overset{t=2}{\Longrightarrow} \dfrac{d^3\vec r}{dt^3} = \dfrac34\vec j + 2\vec k$

Portanto $\vec T(2) = \dfrac{\vec v}{\|v\|} = \dfrac{2\vec i + 4\vec j + 4\vec k}{\sqrt{4+16+16}} =$
$= \dfrac{\vec i + 2\vec j + 2\vec k}{3}$

(C) vetor normal unitário $\vec N(t)$ em $t=2$:

( ) $\dfrac{\vec i + 3\vec j + 4\vec k}{\sqrt{26}}$

( ) $\dfrac{\vec i + 2\vec j + 2\vec k}{3}$

(X) $\dfrac{-2\vec i - \vec j + 2\vec k}{3}$

( ) $\dfrac{\vec i + 2\vec j + 2\vec k}{3}$

( ) $\dfrac{-\vec i + \vec k}{\sqrt2}$

( ) nenhuma das anteriores

(D) vetor binormal $\vec B(t)$ em $t=2$:

(X) $\dfrac{2\vec i - 2\vec j + \vec k}{3}$

( ) $\dfrac{2\vec i + 2\vec j + \vec k}{3}$

( ) $\dfrac{-\vec i + \vec k}{2}$

( ) $\dfrac{\vec i - \sqrt2\vec j + \vec k}{2}$

( ) $\dfrac{\vec i - \sqrt2\vec j + \vec k}{2+\sqrt2}$

( ) nenhuma das anteriores

$$\vec v \times \vec a = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec i - 4\vec j + 2\vec k$$

$$(\vec v \times \vec a) \times \vec v = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -24\vec i - 12\vec j + 24\vec k$$

$$\Rightarrow \vec N = \frac{\vec v \times \vec a \times \vec v}{\|\vec v \times \vec a \times \vec v\|} = \frac{12(2\vec i - \vec j + 2\vec k)}{12\sqrt{4+1+4}} = \frac{-2\vec i - \vec j + 2\vec k}{3}$$

$$\Rightarrow \vec B = \frac{\vec v \times \vec a}{\|\vec v \times \vec a\|} = \frac{2(2\vec i - 2\vec j + \vec k)}{2\sqrt{4+4+1}} = \frac{2\vec i - 2\vec j + \vec k}{3}$$

(E) curvatura em $t=2$:

( ) 1

( ) $\dfrac16$

(X) $\dfrac{1}{36}$

( ) $\dfrac{\sqrt2}{8}$

( ) $\dfrac{\sqrt2}{2}$

( ) nenhuma das anteriores

(F) torção em $t=2$:

( ) $\tau = \dfrac{9-6\sqrt2}{502-324\sqrt2}$

(X) $\tau = \dfrac{1}{36}$

( ) $\tau = -\dfrac56$

( ) $\tau = \dfrac{1}{10}$

( ) $\tau = \dfrac{1}{100}$

( ) nenhuma das anteriores

$$\kappa = \frac{\|\vec v \times \vec a\|}{\|\vec v\|^3} = \frac{\sqrt{16+16+4}}{(4+16+16)^{3/2}} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

$$\tau = \frac{(\vec v \times \vec a)\cdot \frac{d^3\vec r}{dt^3}}{\|\vec v \times \vec a\|^2} = \frac{(4,-4,2)\cdot(0,\frac34,2)}{16+16+4} = \frac{1}{36}$$

$$a_N = \frac{\|\vec v \times \vec a\|}{v} = \frac{\sqrt{16+16+4}}{\sqrt{4+16+16}} = 1$$

$$a_T = \frac{\vec a \cdot \vec v}{v} = \frac{(2,4,4)\cdot(1,3,4)}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{30}{6} = 5$$

(G) aceleração tangencial em $t=2$:

( ) 0

(X) 5

( ) 3

( ) $\dfrac{6}{2+\sqrt{2}}$

( ) 1 ( ) nenhuma das anteriores

(H) aceleração normal em $t=2$:

(X) 1

( ) 0

( ) $\dfrac{5}{4}$

( ) $\dfrac{502-324\sqrt{2}}{6}$

( ) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ ( ) nenhuma das anteriores

Questão 2 Considere a superfície parametrizada (guarda-chuva de Whitney) $\vec{r}=uv\vec{i}+u\vec{j}+v^2\vec{k}$. No ponto em que $u=8$, $v=3$:
(A) obtenha o vetor normal unitário $\vec{N}$.
(B) obtenha uma equação cartesiana do plano tangente.
Solução:
$\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}=v\vec{i}+\vec{j}\Longrightarrow\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}(8,3)=3\vec{i}+\vec{j}$ $\quad\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}=u\vec{i}+2v\vec{k}\Longrightarrow\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}(8,3)=8\vec{i}+6\vec{k}$

Em $(u,v)=(8,3)$: $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&0\\8&0&6\end{vmatrix}=6\vec{i}-18\vec{j}-8\vec{k}$

$\Rightarrow\vec{N}=\dfrac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\|}=\dfrac{2(3\vec{i}-9\vec{j}-4\vec{k})}{2\sqrt{9+81+16}}=\dfrac{3\vec{i}-9\vec{j}-4\vec{k}}{\sqrt{106}}$

Ainda $\vec{r}(8,3)=24\vec{i}+8\vec{j}+9\vec{k}\Longrightarrow P(24,8,9)$ equação cartesiana $3(x-24)-9(y-8)-4(z-9)=0$

Questão 3. Considere o campo vetorial radial dado por $\vec{F}=\exp(2-r)\vec{r}$, a superfície esférica $S_3=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=3^2\}$, e seu normal unitário de superfície $\vec{N}$ orientado para fora.

(A) Determine se $\vec{F}$ é um campo conservativo indicando, se existir, o respectivo potencial radial $g(r)$ nulo na origem.

(B) Determine o divergente de $\vec{F}$.

(C) Calcule o fluxo $\displaystyle\iint_{S_3}\vec{F}\cdot\vec{N}dS$.

Solução:

$$\vec{F}=e^{2-r}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\ ,\ \vec{N}=\frac{\vec{r}}{r},r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow\begin{cases}r_x=\dfrac{2x}{2r}=\dfrac{x}{r}\\ r_y=\dfrac{2y}{2r}=\dfrac{y}{r}\\ r_x=\dfrac{2z}{2r}=\dfrac{z}{r}\end{cases}$$

(A) potencial, se existir, deve satisfazer $\dfrac{\partial g}{\partial x}=e^{2-r}x,\dfrac{\partial g}{\partial y}=e^{2-r}y$ e $\dfrac{\partial g}{\partial z}=e^{2-r}z$

entretanto $\dfrac{\partial g}{\partial x}=g'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=g'(r)\dfrac{x}{r}=e^{2-r}x\Leftrightarrow g'(r)=re^{2-r}$

analogamente $\dfrac{\partial g}{\partial y}=e^{2-r}y$ e $\dfrac{\partial g}{\partial z}=e^{2-r}z$ equivalem a $g'(r)=re^{2-r}$

Integrando obtemos g: $g(r)=\displaystyle\int_0^\rho\rho e^{2-\rho}d\rho=\left[(-\rho-1)e^{2-\rho}\right]_0^r=e^2-(r+1)e^{2-r}$ e assim, pela definição, o campo $\vec{F}$ é conservativo.

(B)

$$\operatorname{div}(\vec{F})=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2-r}x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2-r}y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{2-r}z\right)=-e^{2-r}\frac{x}{r}\,x+e^{2-r}-e^{2-r}\frac{y}{r}\,y+e^{2-r}-e^{2-r}\frac{z}{r}\,z+e^{2-r}=$$

$$3e^{2-r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r}e^{2-r}=(3-r)e^{2-r}$$

(C) em S_3 temos $r=\|\vec{r}\|=3$

$$\iint_{S_3}\vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iint_{S_3}e^{2-3}\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}dS=\frac{3}{e}\iint_{S_3}dS=\frac{3}{e}4\pi3^2=\frac{108\pi}{e}\ \square$$