UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2025/1
Prova da área I

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)}{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)\\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\\| = \left\\|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \frac{\left\\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\\|}{\left\\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\\|} = \frac{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\\|}{\\|\vec{r}\,'(t)\\|^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\\|^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\\| = \left\\|\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \frac{\left\\|\frac{d\vec{B}}{dt}\right\\|}{\left\\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\\|}$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\\|\vec{a} \times \vec{v}\\|}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

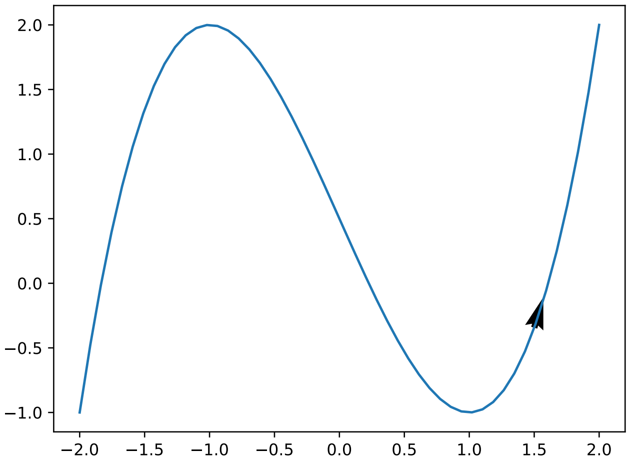
• **Questão 1** (2.5 pontos) Um automóvel se desloca no sentido positivo de x sobre uma pista sinuosa dada pela função $y(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$, onde x é medido em quilômetros, $-2 \leq x \leq 2$. O gráfico ao lado apresenta a pista. As características dos pneus e do asfalto indicam que o automóvel pode derrapar caso a aceleração normal exceda 22.500km/h^2. A velocidade do automóvel obedece a expressão $v(x) = 70 - 10(x + 2)$, $-2 \leq x \leq 2$.

a) (0.5 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ em $x = -1$ e $x = 1$ e esboce no gráfico ao lado.

b) (1.0 ponto) Calcule a curvatura nos pontos $x = -1$ e $x = 0$.

c) (0.5 ponto) Calcule a aceleração normal nos pontos $x = -1$ e $x = 0$.

d) (0.5 ponto) O automóvel poderá derrapar ao longo do percurso? Justifique a sua resposta.



Questão 2 (1.5 ponto) Suponha agora que o automóvel da questão 1 está numa pista sinuosa, mas também está subindo uma montanha, isto é, $y(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$ e $z = \ln(x+3)$. Calcule a torção em $x = -1$.

Questão 3 (3.0 pontos) Seja $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{G}$, onde $\vec{G} = (x^2+y^2+z^2)\vec{i} + (x+y+z)\vec{j} + (x^3+y^2+z)\vec{k}$ e C a semicircunferência $C:\ \vec{r} = \text{sen}(\pi t)\vec{i} + \cos(\pi t)\vec{k}$, $0 \le t \le 1$.

a) (1.0 ponto) Mostre que $\vec{F} = -4\vec{i} - (2+6x)\vec{k}$.

b) (1.0 ponto) Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, usando integração direta.

c) (1.0 ponto) Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, usando o teorema de Stokes. [*Dica: lembre-se que o teorema se aplica a uma curva fechada*].

Questão 4 (3.0 pontos) Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + 2z\vec{k}$ e a superfície S limitada inferiormente pelo cone

$$S_1: \ z = -1 + \sqrt{x^2+y^2}$$

e superiormente pelo cone

$$S_2: \ z = 1 - \sqrt{x^2+y^2},$$

orientada para fora.

a) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S_1, orientada para fora, através de uma parametrização direta da superfície.

b) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S_2, orientada para fora, através de uma parametrização direta da superfície.

c) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície $S = S_1 \cup S_2$, orientada para fora, através do Teorema da Divergência.