UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2025/1
Prova da área I

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{T}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert} = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{B}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert}$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a} \times \vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

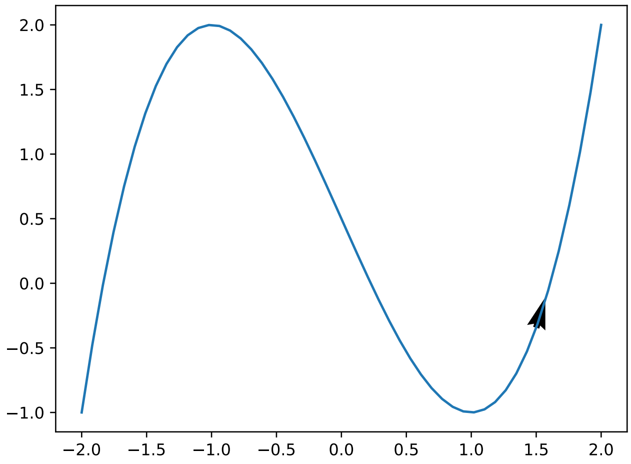
• **Questão 1** (2.5 pontos) Um automóvel se desloca no sentido positivo de x sobre uma pista sinuosa dada pela função $y(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$, onde x é medido em quilômetros, $-2 \leq x \leq 2$. O gráfico ao lado apresenta a pista. As características dos pneus e do asfalto indicam que o automóvel pode derrapar caso a aceleração normal exceda 22.500km/h^2. A velocidade do automóvel obedece a expressão $v(x) = 70 - 10(x+2)$, $-2 \leq x \leq 2$.

a) (0.5 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ em $x = -1$ e $x = 1$ e esboce no gráfico ao lado.

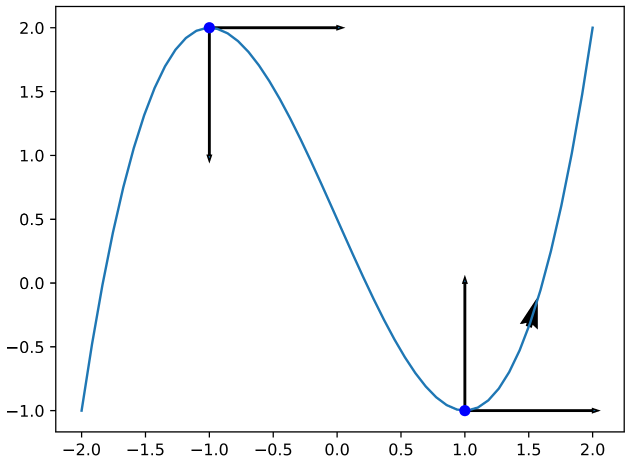
b) (1.0 ponto) Calcule a curvatura nos pontos $x = -1$ e $x = 0$.

c) (0.5 ponto) Calcule a aceleração normal nos pontos $x = -1$ e $x = 0$.

d) (0.5 ponto) O automóvel poderá derrapar ao longo do percurso? Justifique a sua resposta.



Solução a) Na figura abaixo, os dois círculos mostram os pontos de maior curvatura (onde a curva é mais "fechada"). Também, são apresentados os vetores tangente unitário e normal unitário em $x = -1$ e $x = 1$.



Uma parametrização natural é dada por $x = t$ e $y = \frac{3}{4}t^3 - \frac{9}{4}t + \frac{1}{2}$, isto é,

$$\vec{r} = t\vec{i} + \left(\frac{3}{4}t^3 - \frac{9}{4}t + \frac{1}{2}\right)\vec{j}, \qquad -2 \leq t \leq 2$$

Assim,

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + \left(\frac{9}{4}t^2 - \frac{9}{4}\right)\vec{j}.$$

Em $t = -1$, $r'(-1) = \vec{i}$ e, em $t = 1$, $r'(1) = \vec{i}$. Temos

$$\vec{T}(-1) = \vec{T}(1) = \vec{i}.$$

No plano, os vetores ortogonais a $\vec{i}$ podem ser $\vec{j}$ e $-\vec{j}$. A geometria do problema dos dá $N(-1) = -\vec{j}$ e $N(1) = \vec{j}$.

Solução b) Calculamos

$$\vec{r}''(t) = \frac{9}{2}t\vec{j}.$$

Em $t = -1$, temos:

$$\vec{r}'(-1) = \vec{i},$$

$$\vec{r}''(-1) = -\frac{9}{2}\vec{j},$$

$$\vec{r}'(-1) \times \vec{r}''(-1) = -\frac{9}{2}\vec{k},$$

$$\|\vec{r}'(-1) \times \vec{r}''(-1)\| = \frac{9}{2},$$

$$\|\vec{r}'(-1)\| = 1,$$

e

$$\kappa(-1) = \frac{\vec{r}'(-1) \times \vec{r}''(-1)}{\|\vec{r}'(-1)\|^3} = \frac{9}{2}$$

Em $t = 0$, temos:

$$\vec{r}'(0) = \vec{i} - \frac{9}{4}\vec{j},$$
$$\vec{r}''(0) = \vec{0},$$
$$\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \vec{0},$$
$$\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\| = 0,$$
$$\vec{r}'(0) = \sqrt{1 + \frac{81}{16}},$$

e

$$\kappa(0) = \frac{\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)}{\|\vec{r}'(0)\|^3} = 0.$$

Solução c) Usamos a expressão $a_N = \kappa v^2$. Então, em $x = t = 0$, temos $a_N = 0$. Em $x = t = -1$, temos $v = 70 - 10(-1 + 2) = 60$. Logo $a_N = \frac{9}{2}3600 = 16200 km/h^2$.

Solução d) Os cálculos dos itens b) e c) mostram que o maior valor da curvatura acontece em $t = -1$ e vale $\frac{9}{2}$ e o maior valor da velocidade acontece em $t = -2$ e vale 70Km/h. Então, a aceleração normal em toda a pista é certamente menor que $\kappa_{max} v_{max}^2 = \frac{9}{2}70^2 =$ 22050Km/h^2. Logo, o automóvel não corre risco de derrapagem.

Questão 2 (1.5 ponto) Suponha agora que o automóvel da questão 1 está numa pista sinuosa, mas também está subindo uma montanha, isto é, $y(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$ e $z(x) = \ln(x+3)$. Calcule a torção em $x = -1$.

Solução: Usamos a parametrização

$$\vec{r} = t\vec{i} + \left(\frac{3}{4}t^3 - \frac{9}{4}t + \frac{1}{2}\right)\vec{j} + \ln(t+3)\vec{k}$$

e calculamos

$$\vec{r}' = \vec{i} + \left(\frac{9}{4}t^2 - \frac{9}{4}\right)\vec{j} + \frac{1}{t+3}\vec{k},$$

$$\vec{r}'' = \frac{9}{2}t\vec{j} - \frac{1}{(t+3)^2}\vec{k}$$

e

$$\vec{r}''' = \frac{9}{2}\vec{j} + \frac{2}{(t+3)^3}\vec{k}$$

Em $t = -1$, temos

$$\vec{r}' = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k},$$

$$\vec{r}'' = -\frac{9}{2}\vec{j} - \frac{1}{4}\vec{k}$$

e

$$\vec{r}''' = \frac{9}{2}\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k}.$$

Assim,

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \frac{9}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} - \frac{9}{2}\vec{k},$$

$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{1}{16} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{81+1+324}{16}} = \frac{\sqrt{406}}{4},$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = \frac{9}{8} - \frac{9}{8} = 0$$

e

$$\tau = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2} = \frac{0}{\frac{406}{16}} = 0.$$

Questão 3 (3.0 pontos) Seja $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{G}$, onde $\vec{G} = (x^2+y^2+z^2)\vec{i} + (x+y+z)\vec{j} + (x^3+y^2+z)\vec{k}$ e C a semicircunferência $C:\ \vec{r} = \operatorname{sen}(\pi t)\vec{i} + \cos(\pi t)\vec{k}$, $0 \le t \le 1$.

a) (1.0 ponto) Mostre que $\vec{F} = -4\vec{i} - (2+6x)\vec{k}$.

b) (1.0 ponto) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, usando integração direta.

c) (1.0 ponto) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, usando o teorema de Stokes. [*Dica: lembre-se que o teorema se aplica a uma curva fechada*].

Solução: a) Pelo item 10 da tabela, temos $\vec{F} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{G}$. Temos,

$$\vec{\nabla}\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2+y^2+z^2 & x+y+z & x^3+y^2+z \end{vmatrix} = (2y-1)\vec{i} + (2z-3x^2)\vec{j} + (1-2y)\vec{k}$$

e

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y-1 & 2z-3x^2 & 1-2y \end{vmatrix} = -4\vec{i} + (-2-6x)\vec{k}$$

Solução: b) Temos $\vec{r} = \operatorname{sen}(\pi t)\vec{i} + \cos(\pi t)\vec{k}$, $\vec{r}' = \pi\cos(\pi t)\vec{i} - \pi\operatorname{sen}(\pi t)\vec{k}$ e $\vec{F}(\vec{r}) = -4\vec{i} - (2+6\operatorname{sen}(\pi t))\vec{k}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}\cdot\vec{r}'dt \\
&= \int_0^1 (-4\pi\cos(\pi t)) + \pi\operatorname{sen}(\pi t)(2+6\operatorname{sen}(\pi t))dt \\
&= \int_0^1 (-4\pi\cos(\pi t) + 2\pi\operatorname{sen}(\pi t) + 6\pi\operatorname{sen}^2(\pi t))dt \\
&= \int_0^1 (-4\pi\cos(\pi t) + 2\pi\operatorname{sen}(\pi t) + 3\pi - 3\pi\cos(2\pi t))dt \\
&= \left[-4\operatorname{sen}(\pi t) - 2\cos(\pi t) + 3\pi t - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2\pi t)\right]_0^1 \\
&= \left[-4\operatorname{sen}(\pi) - 2\cos(\pi) + 3\pi - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2\pi)\right] - \left[-4\operatorname{sen}(0) - 2\cos(0) + 0 - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(0)\right] \\
&= [2+3\pi] - [-2] = 4+3\pi.
\end{aligned}$$

Solução: c) Seja D o segmento de reta que liga $(0,0,-1)$ a $(0,0,1)$, parametrizado da forma $\vec{r}(t) = t\vec{k}$, $-1 \le t \le 1$. Então $D\cup C$ é uma curva fechada no plano $y=0$, cuja normal é dada por $\vec{n} = \vec{j}$. Assim, podemos aplicar o teorema de Stokes da seguinte forma:

$$\int_{C\cup D} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

ou seja,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS - \int_D \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Primeiro vamos calcula o fluxo do rotacional. Temos

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -4 & 0 & -2-6x \end{vmatrix} = 6\vec{j}.$$

Assim,

$$\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_S 6dA = 6\iint_S 1dA = 3\pi,$$

onde usamos que $\iint_S 1dA$ é a área do semicírculo.

Agora, vamos a última integral. Temos $\vec{r} = t\vec{k}$, $\vec{r}' = \vec{k}$ e $\vec{F}(\vec{r}) = -4\vec{i} - 2\vec{k}$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_D \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{-1}^1 (-4\vec{i} - 2\vec{k})\cdot(\vec{k})dt \\
&= \int_{-1}^1 (-2)dt \\
&= [-2t]_{-1}^1 \\
&= [-2] - [2] = -4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 3\pi - (-4) = 4+3\pi.$$

Questão 4 (3.0 pontos) Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + 2z\vec{k}$ e a superfície S limitada inferiormente pelo cone

$$S_1: \ z = -1 + \sqrt{x^2+y^2}$$

e superiormente pelo cone

$$S_2: \ z = 1 - \sqrt{x^2+y^2},$$

orientada para fora.

a) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S_1, orientada para fora, através de uma parametrização direta da superfície.

b) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S_2, orientada para fora, através de uma parametrização direta da superfície.

c) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície $S = S_1 \cup S_2$, orientada para fora, através do Teorema da Divergência.

Solução: a) Sobre S_1, temos $z = f(x,y) = -1 + \sqrt{x^2+y^2}$, $G = z - \sqrt{x^2+y^2} + 1$ e

$$\vec{\nabla} G = -\frac{x\vec{i}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \vec{k}.$$

Observemos que $\vec{\nabla} G$ está no sentido contrário ao normal, visto que ele aponta para dentro. Logo, vamos precisar o ajuste de sinal na integração. O campo sobre a curva assume a forma

$$\begin{aligned}
\vec{F}(x,y,-1+\sqrt{x^2+y^2}) &= (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (2(-1+\sqrt{x^2+y^2}))\vec{k} \\
&= (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (-2+2\sqrt{x^2+y^2})\vec{k}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS &= -\iint_D \vec{F}\cdot\vec{\nabla} G dA \\
&= -\iint_D \left(-\frac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(y-x)}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2 + 2\sqrt{x^2+y^2} \right) dA \\
&= -\iint_D \left(-\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2 + 2\sqrt{x^2+y^2} \right) dA \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-\frac{r^2}{r} - 2 + 2r \right) r dr d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2 - 2r \right) dr d\theta \\
&= -2\pi \left[\frac{r^3}{3} - r^2 \right]_0^1 \\
&= -2\pi \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Solução: b) Sobre o cone S_2, temos $z = f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, $G = z + \sqrt{x^2+y^2} - 1$ e

$$\vec{\nabla} G = \frac{x\vec{i}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \vec{k}.$$

Observemos que $\vec{\nabla} G$ está no mesmo sentido do normal, logo não vamos precisar fazer o ajuste de sinal na integração. O campo sobre a curva assume a forma

$$\begin{aligned}
\vec{F}(x,y,1-\sqrt{x^2+y^2}) &= (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + 2(1-\sqrt{x^2+y^2})\vec{k} \\
&= (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (2-2\sqrt{x^2+y^2})\vec{k}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS &= \iint_D \vec{F}\cdot\vec{\nabla} G dA \\
&= \iint_D \left(\frac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y(y-x)}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2 - 2\sqrt{x^2+y^2} \right) dA \\
&= \iint_D \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2 - 2\sqrt{x^2+y^2} \right) dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{r^2}{r} + 2 - 2r \right) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-r^2 + 2r \right) dr d\theta \\
&= 2\pi \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Solução: b) Sabemos que $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 1 + 1 + 2 = 4$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1+r}^{1-r} 4r dz dr d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r\left((1-r)-(-1+r)\right) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r(2-2r) dr d\theta \\
&= 8\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^2) dr d\theta \\
&= 16\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 \\
&= 16\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}$$

Observe que a soma do item a) com b) resulta no item c).

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$