UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2025/1
Prova da área I

1-2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas (dissertativas)

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado. Respostas corretas mas sem justificativa receberão apenas 33% da pontuação.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\times\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \left\|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\| = \dfrac{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \dfrac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\cdot\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\| = \left\|\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\|$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\|\vec{a}\times\vec{v}\|}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}$$
$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}$$
$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$$

• **Questão 1** (0.6 ponto cada item) Considerando a trajetória parametrizada pela seguinte função vetorial:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} + \cos(t^2)\vec{k}, \quad t \geq 0,$$

está correto:

(A) tangente unitário $\vec{T}(t)$ =:

( ) $\dfrac{2t\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{2t\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) aceleração $\vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ =:

( ) $2\vec{i} - (2\operatorname{sen}(t^2) + 4t^2\cos(t^2))\vec{j} + (4t^2\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + (4\operatorname{sen}(t^2) + 2t\cos(t^2))\vec{j} + (2t\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + (4t^2\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{j} - (4t^2\cos(t^2) + 2\operatorname{sen}(t^2))\vec{k}$

( ) nenhuma das anteriores

(C) vetor normal unitário $\vec{N}(t)$ =:

( ) $\dfrac{\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}$

( ) $-\cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) nenhuma das anteriores

(D) vetor binormal $\vec{B}(t)$ =:

( ) $\dfrac{t\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} + \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+t^2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-t\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+t^2}}$

( ) nenhuma das anteriores

(E) curvatura em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) $\dfrac{1}{2}$

( ) $\sqrt{2}$

( ) $2\sqrt{2}$

( ) 2

( ) nenhuma das anteriores

(F) torção em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) 2

( ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

( ) $2\sqrt{2}$

( ) $\sqrt{2}$

( ) nenhuma das anteriores

(G) aceleração tangencial em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) 0

( ) $2\sqrt{2}$

( ) $\sqrt{\pi}$

( ) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$

( ) nenhuma das anteriores

(H) aceleração normal em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) 4π

( ) 0

( ) $2\sqrt{\pi}$

( ) $4\sqrt{\pi}$

( ) nenhuma das anteriores

• **Questão 2** (0.6 ponto cada item) Considerando a superfície parametrizada (corneta de Gabriel)

$$\vec{r} = 2v\cos(u)\vec{i} + 2v\,\mathrm{sen}(u)\vec{j} + \frac{2}{v}\vec{k}, \quad 0 \le u \le 2\pi; \quad v > 0$$

no ponto em que $u = \dfrac{\pi}{6}$, $v = \sqrt{2}$, é correto:

(A) vetor normal unitário $\vec{N}$:

( ) $\dfrac{-\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}}{2\sqrt{5}}$

( ) $\dfrac{-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}}{2\sqrt{5}}$

( ) $\dfrac{-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}}{2\sqrt{5}}$

( ) $\dfrac{-\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}}{2\sqrt{5}}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) equação cartesiana do plano tangente

( ) $\sqrt{3}(x - \sqrt{6}) - (y - \sqrt{2}) + 4(z - \sqrt{2}) = 0$

( ) $\sqrt{3}(x - \sqrt{6}) + (y - \sqrt{2}) + 4(z - \sqrt{2}) = 0$

( ) $\sqrt{6}(x - \sqrt{3}) + \sqrt{2}(y - 1) + \sqrt{2}(z - 4) = 0$

( ) $\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + (y - \sqrt{2}) + 4(z - \sqrt{2}) = 0$

( ) nenhuma das anteriores

Há questões na página seguinte.

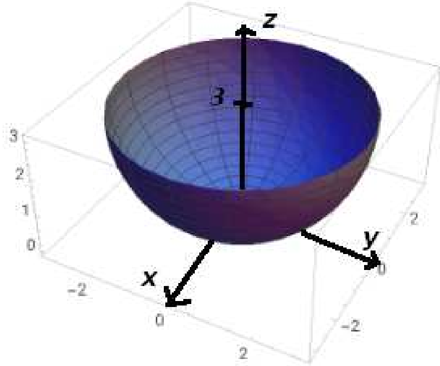
• **Questão 3.** Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = 2x\vec{i} + z\vec{j} + (2z + y)\vec{k}$ e a curva C dada por $\vec{r} = \cos(\pi t)\vec{i} + \text{sen}(\pi t)\vec{j} + \pi t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

• **(a)** (1.0pt) Determine se $\vec{F}$ é um campo conservativo. Obtenha, se existir, o respectivo potencial $g(x, y, z)$, (nulo na origem).

• **(b)** (1.0pt) Obtenha $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

• **Questão 4.** Seja o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (x+x^2)\vec{i} + (y+y^2)\vec{j} + (z+zx)\vec{k}$.

Seja S a porção inferior (meridional) da superfície esférica de centro $C(0,0,3)$ e raio 3; seja o disco $D = \{(x,y,3) : x^2+y^2 \leq 3^2\}$, orientado no sentido z positivo (como superfície). A união de S com D limita um sólido (volume) que denotaremos por G.



• **(a)** (1.0pt) Obtenha $\iint_D \vec{F}\cdot\vec{n}dS$. Se for usar (ρ,θ) na integração, observe que nesse disco D temos $dS = dA = \rho d\rho d\theta$.

• **(b)** (1.0pt) Obtenha $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$ depois de aplicar o Teorema do Divergente em G.

Se faltar espaço para responder questões 3 e 4, use o verso desta folha. Bom Trabalho.