UFRGS - INSTITUTO DE MATEMATICA
Departamento de Matematica Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2025/1
Prova da area I

1-2	3	4	Total

Nome: GABARITO **Cartao:**

- **Questão 1** Considerando a trajetória parametrizada pela seguinte função vetorial:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} + \cos(t^2)\vec{k}, \quad t \geq 0,$$

está correto:

(A) tangente unitário $\vec{T}(t) =$:

( ) $\dfrac{2t\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

(X) $\dfrac{\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{2t\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} - 2t\cos(t^2)\vec{j} - 2t\operatorname{sen}(t^2)\vec{k}$
$\Rightarrow \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = 2\sqrt{2}t$
$\Rightarrow T = \dfrac{2t\vec{i} - 2t\cos(t^2)\vec{j} - 2t\operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{2\sqrt{2}t} =$
$= \dfrac{\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

(B) aceleração $\vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} =$:

( ) $2\vec{i} - (2\operatorname{sen}(t^2) + 4t^2\cos(t^2))\vec{j} + (4t^2\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + (4\operatorname{sen}(t^2) + 2t\cos(t^2))\vec{j} + (2t\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}$

(X) $2\vec{i} + (4t^2\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{j} - (4t^2\cos(t^2) + 2\operatorname{sen}(t^2))\vec{k}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} - 2t\cos(t^2)\vec{j} - 2t\operatorname{sen}(t^2)\vec{k}$ implica
$\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{i} + (4t^2\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{j} - (4t^2\cos(t^2) + 2\operatorname{sen}(t^2))\vec{k}$

(C) vetor normal unitário $\vec{N}(t) =$:

( ) $\dfrac{\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

(X) $\operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}$

( ) $-\cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: $\dfrac{d\vec{T}}{dt} = \sqrt{2}t\operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \sqrt{2}t\cos t^2\vec{k}$
$\Rightarrow \left|\dfrac{d\vec{T}}{dt}\right| = \sqrt{2}t$
$\Rightarrow \vec{N} = \dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|} = \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos t^2\vec{k}$

(D) vetor binormal $\vec{B}(t) =$:

( ) $\dfrac{t\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} + \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+t^2}}$

(X) $\dfrac{\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-t\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+t^2}}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\cos(t^2)}{\sqrt{2}} & -\frac{\operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{2}} \\ 0 & \operatorname{sen}(t^2) & -\cos(t^2) \end{vmatrix} =$
$= \dfrac{\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

(E) curvatura em $t = \sqrt{\pi}$:

(X) $\frac{1}{2}$

( ) $\sqrt{2}$

( ) $2\sqrt{2}$

( ) 2

( ) nenhuma das anteriores

Solução: em qualquer instante t
$\kappa = \frac{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{\sqrt{2}t}{2\sqrt{2}t} = \frac{1}{2}$

(F) torção em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) 2

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

( ) $2\sqrt{2}$

( ) $\sqrt{2}$

(X) nenhuma das anteriores

Solução: $\frac{d\vec{B}}{dt} = -\sqrt{2}t\,\mathrm{sen}(t^2)\vec{j} + \sqrt{2}t\cos t^2\vec{k}$
no instante $t = \sqrt{\pi}$: $\frac{d\vec{B}}{dt} = -\sqrt{2\pi}\vec{k}$, $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi}$
e também, pela parte (C), $\vec{N} = -\cos(\pi)\vec{k} = \vec{k}$
$\Rightarrow \tau = \frac{-\frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\vec{N}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{\sqrt{2\pi}\vec{k}\cdot\vec{k}}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$

(G) aceleração tangencial em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) 0

(X) $2\sqrt{2}$

( ) $\sqrt{\pi}$

( ) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: em $t = \sqrt{\pi}$: $\frac{d\vec{r}}{dt} = 2\sqrt{\pi}\vec{i} + 2\sqrt{\pi}\vec{j} + 0\vec{k}$
$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\pi\vec{k}$, $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi}$
$a_T = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{8\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{2}$

(H) aceleração normal em $t = \sqrt{\pi}$:

(X) 4π

( ) 0

( ) $2\sqrt{\pi}$

( ) $4\sqrt{\pi}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: em $t = \sqrt{\pi}$:
$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -8\pi\sqrt{\pi}\vec{i} + 8\pi\sqrt{\pi}\vec{j} \Rightarrow \left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = 8\sqrt{2}\pi\sqrt{\pi}$
$\Rightarrow a_N = \frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{8\sqrt{2}\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = 4\pi$

• **Questão 2** Considerando a superfície parametrizada (corneta de Gabriel)

$$\vec{r} = 2v\cos(u)\vec{i} + 2v\,\mathrm{sen}(u)\vec{j} + \frac{2}{v}\vec{k}, \quad 0 \le u \le 2\pi; \quad v > 0$$

no ponto em que $u = \frac{\pi}{6}$, $v = \sqrt{2}$, é correto:

(A) vetor normal unitário $\vec{N}$:

(X) $\frac{-\sqrt{3}\ \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}}{2\sqrt{5}}$

( ) $\frac{-\sqrt{3}\ \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}}{2\sqrt{5}}$

( ) $\frac{-\sqrt{3}\ \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}}{2\sqrt{5}}$

( ) $\frac{-\sqrt{3}\ \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}}{2\sqrt{5}}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) equação cartesiana do plano tangente

( ) $\sqrt{3}(x - \sqrt{6}) - (y - \sqrt{2}) + 4(z - \sqrt{2}) = 0$

(X) $\sqrt{3}(x - \sqrt{6}) + (y - \sqrt{2}) + 4(z - \sqrt{2}) = 0$

( ) $\sqrt{6}(x - \sqrt{3}) + \sqrt{2}(y - 1) + \sqrt{2}(z - 4) = 0$

( ) $\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + (y - \sqrt{2}) + 4(z - \sqrt{2}) = 0$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: $\dfrac{d\vec{r}}{du} = -2v\,\mathrm{sen}(u)\vec{i} + 2v\cos(u)\vec{j}$,

$\dfrac{d\vec{r}}{dv} = 2\cos(u)\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}(u)\vec{j} - \dfrac{2}{v^2}\vec{k}$

em $u = \dfrac{\pi}{6}, v = \sqrt{2}$: $\dfrac{d\vec{r}}{du} = -\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{6}\vec{j}$;

$\dfrac{d\vec{r}}{dv} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\dfrac{d\vec{r}}{du} \times \dfrac{d\vec{r}}{dv} = -\sqrt{6}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} - 4\sqrt{2}\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{N} = \dfrac{-\sqrt{6}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} - 4\sqrt{2}\vec{k}}{\left|-\sqrt{6}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} - 4\sqrt{2}\vec{k}\right|} = \dfrac{-\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}}{2\sqrt{5}}$

Solução: em $u = \dfrac{\pi}{6}, v = \sqrt{2}$ temos $\vec{r} = \sqrt{6}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$, que corresponde ao ponto $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{6}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ e portanto a equação do plano tangente é
$\sqrt{3}(x - \sqrt{6}) + (y - \sqrt{2}) + 4(z - \sqrt{2}) = 0$

• **Questão 3.** Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = 2x\vec{i} + z\vec{j} + (2z + y)\vec{k}$ e a curva C dada por $\vec{r} = \cos(\pi t)\vec{i} + \mathrm{sen}(\pi t)\vec{j} + \pi t\vec{k}$, $0 \le t \le 1$.

• **Item a)** Determine se $\vec{F}$ é um campo conservativo indicando, se existir, o respectivo potencial $g(x, y, z)$ (nulo na origem).

• **Item b)** Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução: (a) $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x & z & 2z + y \end{vmatrix} = \vec{i}(1 - 1) - \vec{j}(0) + \vec{k}(0) = \vec{0}$ portanto o campo $\vec{F}$ é conservativo.

Cálculo do potencial g: $g_x = 2x \Rightarrow g = x^2 + p(y, z)$

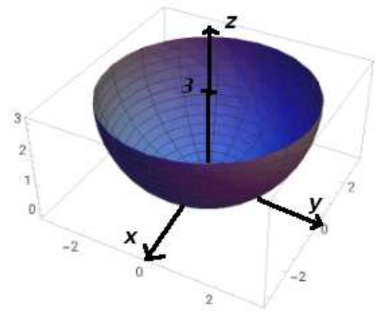
$z = g_y = 0 + \dfrac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow p = yz + q(z) \Rightarrow g = x^2 + yz + q(z)$

$2z + y = g_z = y + \dfrac{dq}{dz} \Rightarrow q = z^2 + C$ onde C constante, então $g(x, y, z) = x^2 + z^2 + yz$

(b) Como o campo é conservativo e tem potencial g:

$\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = g(\vec{r}(1)) - g(\vec{r}(0)) = g(-1, 0, \pi) - g(1, 0, 0) = (-1)^2 + (\pi)^2 + (0)\pi - ((1)^2 + 0^2 + (0)(0)) = \pi^2$

• **Questão 4.** Seja o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (x + x^2)\vec{i} + (y + y^2)\vec{j} + (z + zx)\vec{k}$.
Seja S a porção inferior (meridional) da superfície esférica de centro $C(0, 0, 3)$ e raio 3; seja o disco $D = \{(x, y, 3) : x^2 + y^2 \le 3^2\}$, orientado no sentido z positivo (como superfície). A união de S com D limita um sólido (volume) que denotaremos por G.



• **Item a)** Calcule $\displaystyle\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS$. Se for usar (ρ, θ) na integração, observe que nesse disco D temos $dS = dA = \rho d\rho d\theta$.

• **Item b)** Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ depois de aplicar o Teorema do Divergente no volume G.

Solução: (a) temos $\vec{n} = \vec{k}$ e assim

$$\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (z + zx) dA = \iint_D (3 + 3x) dA = 3 \iint_D dA = 3\pi(3)^2 = 27\pi$$

uma vez que $\displaystyle\iint_D x dA$ é nula por simetria em relação a reta $x = 0$.

(b) divergente de $\vec{F}$: $\nabla \cdot \vec{F} = (1 + 2x) + (1 + 2y) + (1 + x) = 3 + 3x + 2y$. Pelo Teorema do Divergente, $\displaystyle\iint_{D \bigcup S} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_G \nabla \cdot \vec{F} dV \iiint_G (3 + 3x + 2y) dV = 3 \iiint_G dV = 3\frac{2\pi 3^3}{3} = 54\pi$ uma vez que $\displaystyle\iiint_G x dV$ e $\displaystyle\iiint_G y dV$ são nulos por simetria em relação aos planos $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

Finalmente, $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_G \nabla \cdot \vec{F} dV - \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 54\pi - 27\pi = 27\pi$

□