

1	2	3	Total

Nome: \_\_\_\_\_ Cartão: \_\_\_\_\_

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas (dissertativas)

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado. Respostas corretas mas sem justificativa receberão apenas 33% da pontuação.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador  $\vec{\nabla}$ :

$f = f(x, y, z)$  e  $g = g(x, y, z)$  são funções escalares;  
 $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  e  $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$  são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{F} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$
6.	$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{\nabla}f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$ $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$
12.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) -$ $- (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$
13.	$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} +$ $+ \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d\vec{r}}{dt}}{\left\  \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\ }$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left\  \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\ }$
Curvatura	$\kappa = \left\  \frac{d\vec{T}}{ds} \right\  = \left\  \frac{d\vec{T}}{dt} \right\  = \frac{\left\  \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\ }{\left\  \frac{d\vec{r}}{dt} \right\ ^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left\  \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\ ^2}$
Módulo da Torção	$ \tau  = \left\  \frac{d\vec{B}}{ds} \right\  = \left\  \frac{d\vec{B}}{dt} \right\ $
Aceleração normal	$a_N = \frac{\ \vec{a} \times \vec{v}\ }{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$\frac{d\vec{T}}{ds}$	=	$\kappa\vec{N}$
$\frac{d\vec{N}}{ds}$	=	$-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}$
$\frac{d\vec{B}}{ds}$	=	$-\tau\vec{N}$

• **Questão 1** (0.8 ponto cada item) Considerando a trajetória parametrizada pela função vetorial

$$\vec{r}(t) = \ln(2t)\vec{i} + t\vec{j} + \frac{t^2}{4}\vec{k}, \quad t > 0,$$

está correto:

(A) tangente unitário em  $t = 2$ :

$\frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

$\frac{\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{33}}$

$\frac{\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}}{4}$

$\frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{2}$

$\frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$

nenhuma das anteriores

(C) vetor normal unitário em  $t = 2$ :

$\frac{-2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

$\frac{-8\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}}{5\sqrt{5}}$

$\frac{-12\vec{i} - 17\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{442}}$

$\frac{-8\vec{i} - 7\vec{j} + 11\vec{k}}{3\sqrt{26}}$

$\frac{4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{21}}$

nenhuma das anteriores

(E) curvatura em  $t = 2$ :

$\frac{1}{2}$

$\frac{2\sqrt{26}}{27}$

$\frac{8\sqrt{21}}{33\sqrt{33}}$

$\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{33}}$

$\frac{2}{9}$

nenhuma das anteriores

(B) aceleração em  $t = 2$ :

$-\frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$

$\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$

$\frac{-\vec{i} + 2\vec{k}}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$

$-\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$

nenhuma das anteriores

(D) vetor binormal em  $t = 2$ :

$\frac{4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{21}}$

$\frac{4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{4}$

$\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

$\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$

$\frac{4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{26}}$

nenhuma das anteriores

(F) torção em  $t = 2$ :

$\frac{2}{9}$

$\frac{1}{9}$

$\frac{4}{21}$

$\frac{2}{33}$

$\frac{2}{21}$

nenhuma das anteriores



