

1	2	3	Total

• **Questão 1** (0.8 ponto cada item) Considerando a trajetória parametrizada pela função vetorial

$$\vec{r}(t) = \ln(2t)\vec{i} + t\vec{j} + \frac{t^2}{4}\vec{k}, \quad t > 0,$$

está correto:

(A) tangente unitário em $t = 2$:

(X) $\frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

() $\frac{\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{33}}$

() $\frac{\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}}{4}$

() $\frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{2}$

() $\frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$ () N. D. A

(B) aceleração em $t = 2$:

() $-\frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$

() $\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$

() $\frac{-\vec{i} + 2\vec{k}}{\sqrt{5}}$

() $\frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$

(X) $-\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$ () N.D.A

(C) vetor normal unitário em $t = 2$:

() $\frac{-8\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}}{5\sqrt{5}}$

() $\frac{-12\vec{i} - 17\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{442}}$

() $\frac{-8\vec{i} - 7\vec{j} + 11\vec{k}}{3\sqrt{26}}$

() $\frac{4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{21}}$

(X) $\frac{-2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{3}$ () N.D.A

(D) vetor binormal em $t = 2$:

() $\frac{4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{21}}$

() $\frac{4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{4}$

() $\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

(X) $\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$

() $\frac{4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{26}}$ () N.D.A

Solução:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{2}{2t}\vec{i} + \vec{j} + \frac{t}{2}\vec{k} \text{ em } t = 2 : \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{3/2} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{1}{t^2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k} \text{ em } t = 2 : \vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}, \quad \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{2}{t^3}\vec{i} \text{ em } t = 2 : \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{1}{4}\vec{i}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{4} \Rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4}\vec{i} - \frac{3}{8}\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k} = \frac{3}{8}(-2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \Rightarrow |\vec{v} \times \vec{a} \times \vec{v}| = \frac{3}{8}(3) = \frac{9}{8}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{3}, \quad \vec{N} = \frac{\vec{v} \times \vec{a} \times \vec{v}}{|\vec{v} \times \vec{a} \times \vec{v}|} = \frac{-2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{3}$$

(E) curvatura em $t = 2$:

() $\frac{1}{2}$

() $\frac{2\sqrt{26}}{27}$

() $\frac{8\sqrt{21}}{33\sqrt{33}}$

() $\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{33}}$

(X) $\frac{2}{9}$ () nenhuma das anteriores

(G) aceleração tangencial em $t = 2$:

() $\frac{1}{8}$

() $\frac{1}{2}$

(X) $\frac{1}{4}$

() 0

() 1 () nenhuma das anteriores

(F) torção em $t = 2$:

(X) $\frac{2}{9}$

() $\frac{1}{9}$

() $\frac{4}{21}$

() $\frac{2}{33}$

() $\frac{2}{21}$ () nenhuma das anteriores

(H) aceleração normal em $t = 2$:

() 0

() 1

() $\frac{1}{8}$

() $\frac{1}{4}$

() $\frac{11\sqrt{26}}{72}$ (X) nenhuma das anteriores

Solução:

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3} = \frac{3/4}{(3/2)^3} = \frac{2}{9}; \tau = \frac{\vec{v} \times \vec{a} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k}\right) \cdot \frac{1}{4}\vec{i}}{9/16} = \frac{1/8}{9/16} = \frac{2}{9}$$
$$a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|} = \frac{\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}\right)}{3/2} = \frac{3/8}{3/2} = \frac{1}{4}, a_N = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|} = \frac{3/4}{3/2} = \frac{1}{2}$$

• **Questão 2** Considere a superfície quádrlica parametrizada pela função vetorial

$$\vec{r}(u, v) = 2\sqrt{v^2 - 1} \cos(u)\vec{i} + 2\sqrt{v^2 - 1} \sin(u)\vec{j} + 3v\vec{k}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi; \quad 1 < |v| < 5$$

(A)(0.4pt) Obtenha uma equação cartesiana para a superfície, e identifique-a.

No ponto em que $u = \frac{\pi}{3}$, $v = \sqrt{5}$:

(B)(0.4pt) Obtenha o vetor normal unitário \vec{N}

(C)(0.4pt) Obtenha uma equação cartesiana para o plano tangente

Solução: (A) $\frac{x}{2} = \sqrt{v^2 - 1} \cos(u)$, $\frac{y}{2} = \sqrt{v^2 - 1} \sin(u)$, $\frac{z}{3} = v$ implica

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = (v^2 - 1)(\cos^2(u) + \sin^2(u)) = v^2 - 1 = \frac{z^2}{9} - 1 \Rightarrow -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

equação cartesiana de um hiperbolóide de duas folhas.

(B) no ponto em que $u = \frac{\pi}{3}$, $v = \sqrt{5}$ temos $\sqrt{v^2 - 1} = 2$, $\sin(u) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(u) = \frac{1}{2}$ e

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = -2\sqrt{v^2 - 1} \sin(u)\vec{i} + 2\sqrt{v^2 - 1} \cos(u)\vec{j} \text{ assim } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = -2(2)\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + 2(2)\frac{1}{2}\vec{j} = -2\sqrt{3}\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{2v \cos(u)}{\sqrt{v^2 - 1}}\vec{i} + \frac{2v \sin(u)}{\sqrt{v^2 - 1}}\vec{j} + 3\vec{k} \text{ e assim } \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\sqrt{5}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{2}\vec{j} + 3\vec{k}$$

Portanto

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sqrt{3} & 2 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\sqrt{3}\vec{j} + (-3\sqrt{5} - \sqrt{5})\vec{k} = 2(3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j} - 2\sqrt{5}\vec{k})$$

$$\text{implica } \vec{N} = \frac{2(3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j} - 2\sqrt{5}\vec{k})}{2\sqrt{9 + 27 + 20}} = \frac{3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j} - 2\sqrt{5}\vec{k}}{2\sqrt{14}}$$

(C) seja P_0 o ponto de tangência

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{5}\right) = 2(2)\frac{1}{2}\vec{i} + 2(2)\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + 3\sqrt{5}\vec{k} = 2\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j} + 3\sqrt{5}\vec{k} \Rightarrow P_0\left(2, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{5}\right)$$

$$\text{equação cartesiana do plano tangente: } 3(x-2) + 3\sqrt{3}(y-2\sqrt{3}) - 2\sqrt{5}(z-3\sqrt{5}) = 0$$

• **Questão 3.** Considere o campo vetorial radial dado por $\vec{F} = e^{2-r}\vec{r}$

(A)(0.6pt) Obtenha um potencial g para \vec{F} .

(B)(0.6pt) Obtenha o divergente de \vec{F} .

(C)(0.6pt) Obtenha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é a curva parametrizada

$$\vec{r}(t) = \frac{3 \operatorname{sen}(2t)}{2}\vec{i} + \frac{3\sqrt{3} \operatorname{sen}(2t)}{2}\vec{j} + 3 \cos(2t)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

(D)(0.6pt) Obtenha o fluxo de \vec{F} através da superfície esférica S_3 com centro na origem e raio 3, orientada para fora.

Solução: lembramos que $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ implica

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \text{ e analogamente } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

(A) potencial $g(r)$ deve satisfazer $(g_x, g_y, g_z) = \vec{F} = e^{2-r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{2-r}x = \frac{\partial g}{\partial x} = g'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = g'(r)\frac{x}{r} \Rightarrow g' = re^{2-r} \\ e^{2-r}y = \frac{\partial g}{\partial y} = g'(r)\frac{\partial r}{\partial y} = g'(r)\frac{y}{r} \Rightarrow g' = re^{2-r} \\ e^{2-r}z = \frac{\partial g}{\partial z} = g'(r)\frac{\partial r}{\partial z} = g'(r)\frac{z}{r} \Rightarrow g' = re^{2-r} \end{array} \right\} \text{ que são equivalentes a } g'(r) = re^{2-r}$$

$$\text{dessa forma, salvo por constante aditiva, } g = \int re^{2-r} dr = -re^{2-r} + \int e^{2-r} dr = -(r+1)e^{2-r}$$

(B)

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{2-r}) + \frac{\partial}{\partial y}(ye^{2-r}) + \frac{\partial}{\partial z}(ze^{2-r}) = 3e^{2-r} - \left(x\frac{x}{r} + y\frac{y}{r} + z\frac{z}{r}\right)e^{2-r} = (3-r)e^{2-r}$$

(C) (i) Cálculo direto: $\frac{d\vec{r}}{dt} = 3 \cos(2t)\vec{i} + 3\sqrt{3} \cos(2t)\vec{j} - 6 \operatorname{sen}(2t)\vec{k}$ implica

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = e^{2-r}\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = e^{2-r} \left(\frac{9}{2} \operatorname{sen}(2t) \cos(2t) + \frac{27}{2} \operatorname{sen}(2t) \cos(2t) - 18 \operatorname{sen}(2t) \cos(2t) \right) = 0 \text{ para todo } t$$

$$\text{implica } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

(ii) usando o potencial radial $g = -(r+1)e^{2-r}$ obtido na parte (A):

$$\vec{r}(0) = 3\vec{k} \Rightarrow r(0) = |\vec{r}(0)| = 3 \Rightarrow g(r(0)) = g(3) = -(3+1)e^{2-3} = -4e^{-1}$$

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\vec{k} \Rightarrow r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left|\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 3 \Rightarrow g\left(r\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = g(3) = -(3+1)e^{2-3} = -4e^{-1}$$

$$\text{implicam } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = g\left(r\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - g(r(0)) = 0.$$

(D) (Cálculo Direto) na superfície $S_3 : r = 3, \vec{N} = \frac{\vec{r}}{3}$ implicam

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = e^{2-3}\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{3} = \frac{r^2 e^{-1}}{3} = 3e^{-1} \Rightarrow \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_{S_3} 3e^{-1} dS = 3e^{-1} \iint_{S_3} dS = \frac{3}{e} 4\pi 3^2 = \frac{108\pi}{e}$$

(Divergente): seja E_3 a esfera de raio 3, $V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$

$$\iiint_{E_3} (3-r)e^{2-r} dV = \int_0^3 (3-r)e^{2-r} 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^3 (3r^2 - r^3)e^{2-r} dr = 4\pi [r^3 e^{2-r}]_0^3 = 4\pi(27e^{-1}) = \frac{108\pi}{e}$$

□