UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2025/2
Prova da área I

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\\| = \left\\|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \frac{\left\\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\\|}{\left\\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\\|} = \frac{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|}{\\|\vec{r}\,'(t)\\|^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|^2}$
Módulo da Torção	$\|\tau\| = \left\\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\\| = \left\\|\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \frac{\left\\|\frac{d\vec{B}}{dt}\right\\|}{\left\\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\\|}$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\\|\vec{a}\times\vec{v}\\|}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (3.0 pontos) Considere a trajetória de uma partícula ao longo da curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \text{sen}(t)\vec{i} + \cos(3t)\vec{j} + \text{sen}(2t)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

responda o que se pede.

a) (0.75 ponto) Curvatura em $t = \pi$.

b) (0.75 ponto) Torção em $t = \pi$.

c) (0.75 ponto) Aceleração normal e aceleração tangencial em $t = \pi$.

d) (0.75 ponto) Suponha que a partícula dê uma segunda volta na mesma trajetória, isto é, $2\pi \leq t \leq 4\pi$, mas com uma outra cinética, em vez daquela fixada pela parametrização. Nesse caso, suponha uma aceleração tangencial constante igual a 1 m/s^2 e a velocidade escalar em $t = 2\pi$ igual a π m/s. Calcule a velocidade escalar em $t = 3\pi$ e a aceleração normal em $t = 3\pi$.

• **Questão 2** (3.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = (3yz^2+z+1)\vec{i}+3xz^2\vec{j}+(6xyz+x)\vec{k}$ e a curva C dada por $\vec{r}(t) = (t+1)\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$. Responda os itens abaixo.

a) (0.5 ponto) Mostre que $\vec{F}$ é um campo conservativo.

b) (0.5 ponto) Calcule o potencial de $\vec{F}$, isto é, o campo escalar φ tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$.

c) (1.0 ponto) Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando o teorema fundamental para integral de linhas.

d) (1.0 ponto) Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ por integração direta.

• **Questão 3** (1.5 pontos) Considere S a superfície orientada para fora que contorna o sólido V limitado superiormente pelo plano $z = 1$ e inferiormente pela superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ e o campo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$. Calcule o valor de $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

• **Questão 4** (2.5 pontos) Considere a circunferência que limita a superfície aberta de equação

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ 0 \leq z \leq 1$$

orientada no sentido anti-horário (em relação ao eixo z) e o campo $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + yz\vec{k}$.

(a) (1.0 ponto) Calcule o valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando integração direta.

(b) (1.5 ponto) Calcule o valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando o teorema de Stokes.