**UFRGS**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**MAT01168 - Turma D - 2025/2**
**Prova da área I**

| 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Nome:** ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

| | |
|---|---|
| 1. | $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$ |
| 2. | $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$ |
| 3. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$ |
| 4. | $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$ |
| 5. | $\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$ |
| 6. | $\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$ |
| 7. | $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano |
| 8. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$ |
| 9. | $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$ |
| 10. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$ |
| 11. | $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$ |
| 12. | $\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$ |
| 13. | $\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$ |
| 14. | $\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$ |

Curvatura, torção e aceleração:

| Nome | Fórmula |
|---|---|
| Vetor normal | $\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)\rVert}$ |
| Vetor binormal | $\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\rVert}$ |
| Curvatura | $\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{T}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert} = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$ |
| Torção | $\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\rVert^2}$ |
| Módulo da Torção | $\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{B}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert}$ |
| Aceleração normal | $a_N = \frac{\lVert\vec{a} \times \vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$ |
| Aceleração tangencial | $a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$ |

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N} \end{aligned}$$

• **Questão 1** (3.0 pontos) Considere a trajetória de uma partícula ao longo da curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \text{sen}(t)\vec{i} + \cos(3t)\vec{j} + \text{sen}(2t)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

responda o que se pede.

a) (0.75 ponto) Curvatura em $t = \pi$.

b) (0.75 ponto) Torção em $t = \pi$.

c) (0.75 ponto) Aceleração normal e aceleração tangencial em $t = \pi$.

d) (0.75 ponto) Suponha que a partícula dê uma segunda volta na mesma trajetória, isto é, $2\pi \leq t \leq 4\pi$, mas com uma outra cinética, em vez daquela fixada pela parametrização. Nesse caso, suponha uma aceleração tangencial constante igual a 1 m/s$^2$ e a velocidade escalar em $t = 2\pi$ igual a $\pi$ m/s. Calcule a velocidade escalar em $t = 3\pi$ e a aceleração normal em $t = 3\pi$.

**Solução: a) e b)** Para torção e curvatura, calculamos as derivadas:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \text{sen}(t)\vec{i} + \cos(3t)\vec{j} + \text{sen}(2t)\vec{k} \\
\vec{r}'(t) &= \cos(t)\vec{i} - 3\,\text{sen}(3t)\vec{j} + 2\cos(2t)\vec{k} \\
\vec{r}''(t) &= -\text{sen}(t)\vec{i} - 9\cos(3t)\vec{j} - 4\,\text{sen}(2t)\vec{k} \\
\vec{r}'''(t) &= -\cos(t)\vec{i} + 27\,\text{sen}(3t)\vec{j} - 8\cos(2t)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Em $t = \pi/2$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= -\vec{i} + 2\vec{k} \\
\vec{r}'' &= 9\vec{j} \\
\vec{r}''' &= \vec{i} - 8\vec{k}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\vec{r}' \times \vec{r}'' &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -18\vec{i} - 9\vec{k} \\
\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| &= \sqrt{(-18)^2 + (-9)^2} = \sqrt{405} = 9\sqrt{5} \\
\|\vec{r}'\| &= \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5} \\
\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' &= -18 + 72 = 54
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{9\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^3} = \frac{9}{5} \\
\tau &= \frac{54}{405} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

**Solução: c)** Calculamos:

$$a_N = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{v} = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|r'\|} = \frac{9\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 9.$$

e

$$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{\vec{r''} \cdot \vec{r'}}{\|r'\|} = 0.$$

**Solução: d)** Primeiro observamos $t = \pi$ e $t = 3\pi$ levam ao mesmo ponto da curva. Portanto, a curvatura é a mesma, isto é,

$$\kappa(3\pi) = \kappa(\pi) = \frac{9}{5}.$$

Sabendo que $a_T = v' = 1$, temos que $\displaystyle\int_{2\pi}^{t} v'(\tau)d\tau = \int_{2\pi}^{t} 1d\tau$, isto é, $v(t) - v(2\pi) = (t - 2\pi)$. Assim, $v(t) = t - \pi$. Logo, $v(3\pi) = 3\pi - \pi = 2\pi$. Também,

$$a_N = v^2\kappa = (2\pi)^2\frac{9}{5} = \frac{36}{5}\pi^2.$$

• **Questão 2** (3.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = (3yz^2 + z + 1)\vec{i} + 3xz^2\vec{j} + (6xyz + x)\vec{k}$ e a curva $C$ dada por $\vec{r}(t) = (t+1)\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$. Responda os itens abaixo.

a) (0.5 ponto) Mostre que $\vec{F}$ é um campo conservativo.

b) (0.5 ponto) Calcule o potencial de $\vec{F}$, isto é, o campo escalar $\varphi$ tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$.

c) (1.0 ponto) Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando o teorema fundamental para integral de linhas.

d) (1.0 ponto) Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ por integração direta.

**Solução: a)** Um campo é conservativo se, e somente se, for irrotacional.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3yz^2 + z + 1 & 3xz^2 & 6xyz + x \end{vmatrix} = \vec{0}$$

**Solução: b)** Seja $\phi(x, y, z)$ o potencial, então

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (3yz^2 + z + 1) \Rightarrow \phi = 3xyz^2 + xz + x + C_1(y, z)$$

Agora, derivamos com respeito a $y$ para obter a segunda componente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3xz^2 + \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 3xz^2$$

Assim,

$$\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C_1(y,z) = C_2(z) \Rightarrow \phi = 3xyz^2 + xz + x + C_1(z)$$

Finalmente, derivamos com respeito a $z$ para obter a última componente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 6xyz + x + \frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = 6xyz + x$$

Logo,

$$\frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow C_2(z) = C \Rightarrow \phi = 3xyz^2 + xz + x + C$$

**Solução: c)** Pelo teorema fundamental para integral de linhas, a integral de linha é a diferença de potencial

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(1)) - \phi(\vec{r}(0)).$$

Calculamos $\vec{r}(1) = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{j}$ e $\vec{r}(1) = \vec{i}$. Logo

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(2,1,1) - \phi(1,0,0) = (10) - (1) = 9.$$

**Solução: d)** Temos que

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

e

$$\vec{F}(\vec{r}) = (3t^8 + t^3 + 1)\vec{i} + 3(t+1)t^6\vec{j} + (6(t+1)t^5 + (t+1))\vec{k}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F} \cdot \vec{r}' dt && (1)\\
&= \int_0^1 (3t^8 + t^3 + 1) + 2t(3(t+1)t^6) + 3t^2((6(t+1)t^5 + (t+1)))dt && (2)\\
&= \int_0^1 (27t^8 + 24t^7 + 4t^3 + 3t^2 + 1)dt && (3)\\
&= \left[3t^9 + 3t^8 + t^4 + t^3 + t\right]_0^1 = 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 9. && (4)
\end{aligned}$$

• **Questão 3** (1.5 pontos) Considere $S$ a superfície orientada para fora que contorna o sólido $V$ limitado superiormente pelo plano $z = 1$ e inferiormente pela superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ e o campo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$. Calcule o valor de $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

**Solução por parametrização direta:** Escreva $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ onde $\Phi_1$ é a lateral e $\Phi_2$ é o topo. Começamos calculando $\Phi_1$:

$$\Phi_1 = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA$$

onde $G(x,y,z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\vec{\nabla} G = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k}$, assim

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G = -\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z^2$$

Convertendo para coordenadas polares, temos:

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G = -\frac{r^2}{r} + r^2 = r^2 - r$$

e

$$\Phi_1 \quad = \quad -\int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 - r) r dr d\theta = -2\pi \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

Agora, calculamos $\Phi_2$:

$$\Phi_2 \quad = \quad \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (x\vec{i} + y\vec{j} + 1^2\vec{k}) \cdot \vec{k} dS = \iint_S 1 dS = \text{ área de S } = \pi$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

**Solução pelo teorema da divergência:** Observe que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2 + 2z$, assim

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iiint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= 2 \iiint_S (1+z) dV \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 (1+z) r dz dr d\theta \\
&= 4\pi \int_0^1 \left[ (z + \frac{z^2}{2}) r \right]_{z=r}^{z=1} dr \\
&= 4\pi \int_0^1 r \left[ (1 + \frac{1^2}{2}) - (r + \frac{r^2}{2}) \right] dr \\
&= 4\pi \int_0^1 \left( \frac{3r}{2} - r^2 - \frac{r^3}{2} \right) dr \\
&= 4\pi \left[ \frac{3r^2}{4} - \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8} \right]_0^1 \\
&= 4\pi \left[ \frac{3}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right]_0^1 = \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}$$

• **Questão 4** (2.5 pontos) Considere a circunferência que limita a superfície aberta de equação

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ 0 \leq z \leq 1$$

orientada no sentido anti-horário (em relação ao eixo $z$) e o campo $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + yz\vec{k}$.

(a) (1.0 ponto) Calcule o valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando integração direta.

(b) (1.5 ponto) Calcule o valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando o teorema de Stokes.

**Solução: a)** Uma parametrização para a circunferência no plano $z = 1$ é dada por $\vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + \vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $\vec{r}' = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$ e $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + \operatorname{sen}(t)\vec{k}$, temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2(t) - \cos^2(t)) dt = -\int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi.$$

**Solução: b)** Temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & yz \end{vmatrix} = z\vec{i} - 2\vec{k}.$$

Pelo teorema de Stokes

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

onde $S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $S_2 : z = 1$, ambas superfícies com domínio $x^2 + y^2 \leq 1$. Portanto, escolhemos $G = z - 1$ e temos $\vec{\nabla} G = \vec{k}$. Dado que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = z\vec{i} - 2\vec{k} = \sqrt{x^2 + y^2}\vec{i} - 2\vec{k}$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA \\
&= \iint_D (-2) dA \\
&= -2 \iint_D 1 dA = -2\pi,
\end{aligned}$$

onde usamos que $D$ é o disco unitário.