UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2026/1
Prova da área I

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{T}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert} = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right)\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{B}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert}$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (3.5 pontos) Um trecho de uma montanha russa possui uma trajetória descrita pela curva

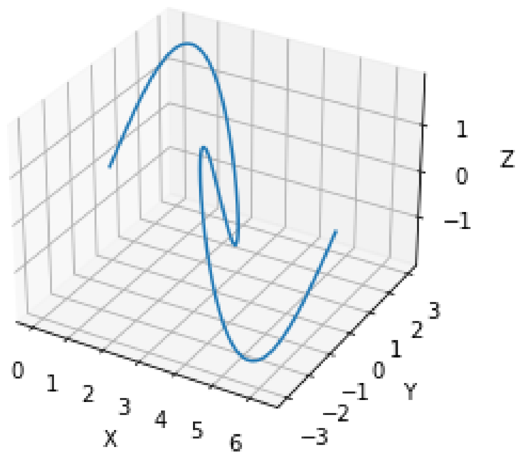
$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + 3\,\mathrm{sen}(t)\vec{j} + 2\,\mathrm{sen}(2t)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(a) (0.5 ponto) Marque com X o primeiro ponto da curva onde a função curvatura assume um máximo local.

(b) (1.0 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ no ponto $t = \dfrac{3\pi}{2}$.

(c) (1.0 ponto) Calcule a curvatura no ponto $t = \dfrac{3\pi}{2}$.

(d) (1.0 ponto) Calcule a torção no ponto $t = \dfrac{3\pi}{2}$.



• **Questão 2** (1.5 pontos) Considere o campo radial dado por:

$$\vec{F} = e^{-2r}\hat{r}$$

Calcule o trabalho dado pela integral de linha do campo $\vec{F}$ ao longo da trajetória descrita por:

$$x(t) = 3\cos(t), \quad y(t) = 3\,\mathrm{sen}(t) \quad z(t) = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

[Dica: use o teorema fundamental para integral de linhas]

- **Questão 3** (3.0 pontos) Seja o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e seja S o parabolóide definido por

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0,$$

orientado com o vetor normal apontando para o sentido positivo do eixo z.

a) (0.5 ponto) Calcule $\nabla \times \vec{F}$.

b) (1.25 ponto) Utilize o Teorema de Stokes para calcular a integral de superfície

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS,$$

convertendo-a em uma integral de linha sobre a borda da superfície S.

c) (1.25 ponto) Calcule diretamente a integral de superfície e compare os resultados obtidos.

• **Questão 4** (2.0 ponto) Considere o campo dado por $\vec{F} = x\vec{i} + \vec{j} + z^2\vec{k}$. Calcule o valor do fluxo $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ onde S é superfície fechada e orientada para fora formada pela superfície $S : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4$ e o disco D no plano $z = 4$ limitado por $x^2 + y^2 \leq 4$. *[Dica: Use o teorema da Divergência.]*