UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2026/1
Prova da área I

1	2	3	4	Total

Nome: ____________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

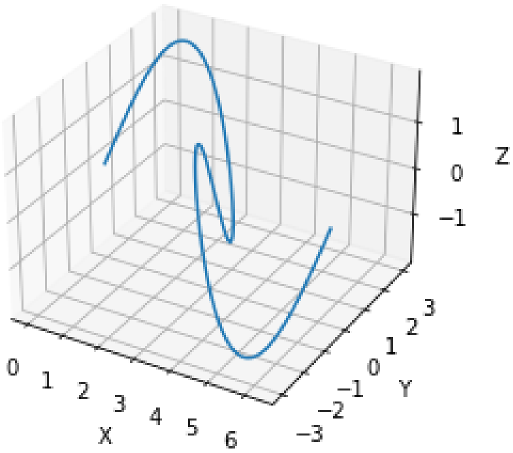
Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)\Vert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\Vert}$
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\left\Vert\frac{d\vec{T}}{dt}\right\Vert}{\left\Vert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\Vert} = \frac{\Vert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}\,'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\left\Vert\frac{d\vec{B}}{dt}\right\Vert}{\left\Vert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\Vert}$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a} \times \vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (3.5 pontos) Um trecho de uma montanha russa possui uma trajetória descrita pela curva

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + 3\operatorname{sen}(t)\vec{j} + 2\operatorname{sen}(2t)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



(a) (0.5 ponto) Marque com X o primeiro ponto da curva onde a função curvatura assume um máximo local.

(b) (1.0 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ no ponto $t = \dfrac{3\pi}{2}$.

(c) (1.0 ponto) Calcule a curvatura no ponto $t = \dfrac{3\pi}{2}$.

(d) (1.0 ponto) Calcule a torção no ponto $t = \dfrac{3\pi}{2}$.

Solução:

a)

b) Primeiro, calculamos as derivadas

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 3\cos(t)\vec{j} + 4\cos(2t)\vec{k}$$
$$\vec{r}''(t) = -3\operatorname{sen}(t)\vec{j} - 8\operatorname{sen}(2t)\vec{k}$$

Em $t = \dfrac{3\pi}{2}$, temos:

$$\vec{r}'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \vec{i} - 4\vec{k}$$
$$\vec{r}''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\vec{j}$$

Assim,

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = 12\vec{i} + 3\vec{k}$$
$$\vec{r}' \times \vec{r}'' \times \vec{r}' = 51\vec{j}$$
$$\|\vec{r}'\| = \sqrt{17}$$
$$\|\vec{r}' \times \vec{r}'' \times \vec{r}'\| = 51$$

Assim,

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\vec{i} - 4\vec{k}\right)$$
$$\vec{N} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}'' \times \vec{r}'}{\|\vec{r}' \times \vec{r}'' \times \vec{r}'\|} = \vec{j}$$
$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4\vec{i} + \vec{k}\right)$$

c) Continuando as contas do item b), temos:

$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| = \sqrt{144 + 9} = \sqrt{153}$$

Portanto,

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} = \frac{\sqrt{153}}{\left(\sqrt{17}\right)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{17}}{17\sqrt{17}} = \frac{3}{17}.$$

d) Calculamos a terceira derivada e aproveitamos os resultados do item anterior.

$$\vec{r}'''(t) = -3\cos(t)\vec{j} - 16\cos(2t)\vec{k}$$
$$\vec{r}'''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 16\vec{k}$$
$$\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = 48.$$

Portanto,

$$\tau = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2} = \frac{48}{153} = \frac{16}{51}.$$

• **Questão 2** (1.5 pontos) Considere o campo radial dado por:

$$\vec{F} = e^{-2r}\hat{r}$$

Calcule o trabalho dado pela integral de linha do campo $\vec{F}$ ao longo da trajetória descrita por:

$$x(t) = 3\cos(t), \quad y(t) = 3\,\mathrm{sen}(t) \quad z(t) = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

[Dica: use o teorema fundamental para integral de linhas]

Solução: O campo radial admite um potencial (central) $\varphi(r)$ tal que:

$$\vec{\nabla}\varphi(r) = \vec{F}$$

Assim $\varphi'(r) = e^{-2r}$, isto é $\varphi(r) = -\frac{1}{2}e^{-2r} + C$.

Pelo teorema fundamental das integrais de linhas, temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(r(2)) - \varphi(r(0)).$$

Observe que $\vec{r}(0) = 3\vec{i}$ e $\vec{r}(2) = 3\cos(2)\vec{i} + 3\,\mathrm{sen}(2)\vec{j} + 4\vec{k}$. Logo, $r(0) = \|\vec{r}(0)\| = 3$ e $r(2) = \|\vec{r}(2)\| = \sqrt{9\cos^2(2) + 9\,\mathrm{sen}^2(2) + 16} = 5$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(r(2)) - \varphi(r(0)) \\ &\left(-\frac{1}{2}e^{-10} + C\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-6} + C\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-6} - e^{-10}\right).\end{aligned}$$

• **Questão 3** (3.0 pontos) Seja o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e seja S o parabolóide definido por

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0,$$

orientado com o vetor normal apontando para o sentido positivo do eixo z.

a) (0.5 ponto) Calcule $\nabla \times \vec{F}$.

b) (1.25 ponto) Utilize o Teorema de Stokes para calcular a integral de superfície

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS,$$

convertendo-a em uma integral de linha sobre a borda da superfície S.

c) (1.25 ponto) Calcule diretamente a integral de superfície e compare os resultados obtidos.

Solução:

a)

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \\ &= -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

b) Seja $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, uma parametrização para o círculo unitário C que limita o parabolóide. Observe que a orientação anti-horária já obedece a regra da mão direita em relação a orientação do parabolóide. Assim, dado que $r'\vec{(t)} = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$ e $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{k}$, temos

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \vec{r}'\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2(t))dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos(2t) - 1)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) - t\right]_0^{2\pi} \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

c) Para fazer a integração direta, definimos $G = z - 1 + x^2 + y^2$. Assim, $\vec{\nabla}G = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$. O rotacional sobre o parabolóide assume a forma $-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Logo,

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS &= + \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{\nabla} G dA \\ &= \iint_D (-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \cdot (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k})dA \\ &= \iint_D (-2x - 2y - 1)dA\end{aligned}$$

onde D é o disco unitário no plano xy. Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2r\cos(\theta) - 2r\operatorname{sen}(\theta) - 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2r^2(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)) - r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2r^3}{3}(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)) - \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} (\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta))d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= -\frac{2}{3}\left[(\operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta))\right]_0^{2\pi} - \pi \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

• **Questão 4** (2.0 ponto) Considere o campo dado por $\vec{F} = x\vec{i} + \vec{j} + z^2\vec{k}$. Calcule o valor do fluxo $\Phi = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$ onde S é superfície fechada e orientada para fora formada pela superfície $S: z = x^2+y^2, 0 \le z \le 4$ e o disco D no plano $z = 4$ limitado por $x^2+y^2 \le 4$. *[Dica: Use o teorema da Divergência.]*

Solução O divergente do campo é dado por $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 1+2z$. Pelo teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS \\
&= \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 (1+2z)\, r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[(z+z^2)r\right]_{z=r^2}^{z=4}\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \big((20-r^2-r^4)r\big)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \big((20r-r^3-r^5)\big)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[10r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(40-4-\frac{32}{3}\right) d\theta \\
&= \frac{76}{3}\int_0^{2\pi} 1 d\theta \\
&= \frac{152\pi}{3}
\end{aligned}$$