

1	2	3	4	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:

$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
 $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{F} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$
6.	$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{\nabla}f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$
12.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) -$ $- (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$
13.	$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} +$ $+ \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)\ }$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }$
Curvatura	$\kappa = \left\ \frac{d\vec{T}}{ds} \right\ = \left\ \frac{d\vec{T}}{dt} \right\ \left \frac{dt}{ds} \right = \frac{\left\ \frac{d\vec{T}}{dt} \right\ }{\left\ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\ } = \frac{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }{\ \vec{r}'(t)\ ^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ ^2}$
Módulo da Torção	$ \tau = \left\ \frac{d\vec{B}}{ds} \right\ = \left\ \frac{d\vec{B}}{dt} \right\ \left \frac{dt}{ds} \right = \frac{\left\ \frac{d\vec{B}}{dt} \right\ }{\left\ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\ }$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\ \vec{a} \times \vec{v}\ }{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

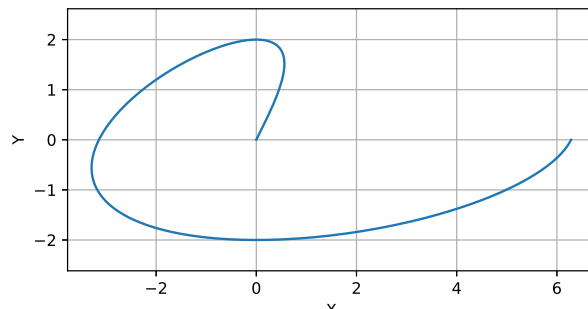
$\frac{d\vec{T}}{ds}$	=	$\kappa\vec{N}$
$\frac{d\vec{N}}{ds}$	=	$-\kappa\vec{T} \quad +\tau\vec{B}$
$\frac{d\vec{B}}{ds}$	=	$-\tau\vec{N}$

• **Questão 1** (4.0 pontos) Seja a trajetória definida por:

$$\vec{r}(t) = t \cos(t)\vec{i} + 2 \sin(t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- (a) (1.0 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}(t_0)$, $\vec{N}(t_0)$ e $\vec{B}(t_0)$ no ponto $t_0 = \pi$.
- (b) (0.5 ponto) Esboce esses três vetores no gráfico indicando a posição $\vec{r}(t_0)$.
- (c) (1.0 ponto) Calcule a curvatura no mesmo ponto.
- (d) (1.5 ponto) Calcule a integral de linha ao longo do caminho dado para o seguinte campo conservativo:

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz + y + 2x)\vec{i} + (xz + x)\vec{j} + (xy + 1)\vec{k}$$



- **Questão 2** (3.0) Considere o campo $\vec{F} = z^2\vec{k}$ e a região V limitada superiormente por

$$z = 1$$

e inferiormente por

$$x^2 + y^2 - z = 0.$$

- (1.5 ponto) Calcule o fluxo de \vec{F} através da superfície S que limita V orientada para fora usando o Teorema da Divergência.
- (1.5 ponto) Calcule o fluxo de \vec{F} através da superfície S que limita V orientada para fora através de uma integral direta sobre a superfície e usando parametrizações adequadas.

• **Questão 3** (3.0 pontos) Considere o caminho C dado pelo triângulo de vértices $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 0)$ e $P_3(0, 1, 1)$ no sentido $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_1$. Calcule o valor da circulação de $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + e^x yz\vec{j} + \vec{k}$ ao longo de C .

- a) (1.5 ponto) Usando o teorema de Stokes.
- b) (1.5 ponto) Usando uma parametrização direta da curva.