UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2026/1
Prova da área I

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

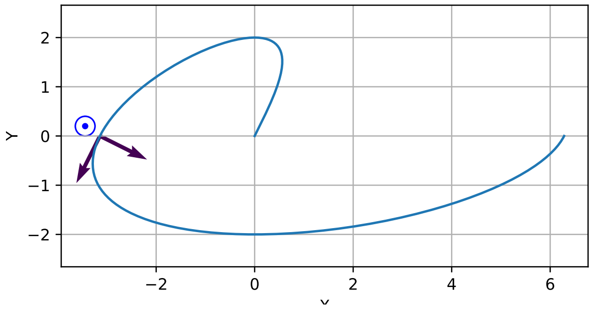
Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{T}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert} = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\left\lVert\frac{d\vec{B}}{dt}\right\rVert}{\left\lVert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rVert}$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (4.0 pontos) Seja a trajetória definida por:

$$\vec{r}(t) = t\cos(t)\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$



(a) (1.0 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}(t_0)$, $\vec{N}(t_0)$ e $\vec{B}(t_0)$ no ponto $t_0 = \pi$.

(b) (0.5 ponto) Esboce esses três vetores no gráfico indicando a posição $\vec{r}(t_0)$.

(c) (1.0 ponto) Calcule a curvatura no mesmo ponto.

(d) (1.5 ponto) Calcule a integral de linha ao longo do caminho dado para o seguinte campo conservativo:

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz + y + 2x)\vec{i} + (xz + x)\vec{j} + (xy + 1)\vec{k}$$

Solução:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= t\cos(t)\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{j} \\ \vec{r}\,'(t) &= [\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t)]\,\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} \\ \vec{r}\,''(t) &= -\left[2\,\mathrm{sen}(t) + t\cos(t)\right]\vec{i} - 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{j} \end{aligned}$$

Em $t = \pi$:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\pi) &= -\pi\vec{i} \\ \vec{r}\,'(\pi) &= -\vec{i} - 2\vec{j} \\ \vec{r}\,''(\pi) &= \pi\vec{i} \\ \vec{r}\,'(\pi) \times \vec{r}\,''(\pi) &= 2\pi\vec{k} \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \vec{T}(\pi) &= \frac{\vec{r}\,'(\pi)}{\|\vec{r}\,'(\pi)\|} = \frac{-\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(-\vec{i} - 2\vec{j}\right) \\ \vec{B}(\pi) &= \frac{\vec{r}\,'(\pi) \times \vec{r}\,''(\pi)}{\|\vec{r}\,'(\pi) \times \vec{r}\,''(\pi)\|} = \vec{k} \\ \vec{N}(\pi) &= \vec{B}(\pi) \times \vec{T}(\pi) \\ &= \vec{k} \times \frac{\sqrt{5}}{5}\left(-\vec{i} - 2\vec{j}\right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(-\vec{j} + 2\vec{i}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(2\vec{i} - \vec{j}\right) \end{aligned}$$

Obs: A curva é plano e orientada no sentido anti-horário, pelo que é possível inferir $\vec{B} = \vec{k}$ sem calcular.
Finalmente a curvatura é dada por:

$$\begin{aligned} \kappa(\pi) &= \frac{\|\vec{r}\,'(\pi) \times \vec{r}\,''(\pi)\|}{\|\vec{r}\,'(\pi)\|^3} \\ &= \frac{2\pi}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}\pi}{25} \end{aligned}$$

Solução do item b O potencial é dado por:

$$\varphi(x,y,z) = xyz + xy + z + x^2 + C$$

Os pontos inicial e final são:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0,0,0) \\ P_1 &= (2\pi,0,0). \end{aligned}$$

$$\varphi(2\pi,0,0) - \varphi(0,0,0) = \left((2\pi)^2 + C\right) - (C) = 4\pi^2$$

• **Questão 2** (3.0) Considere o campo $\vec{F} = z^2\vec{k}$ e a região V limitada superiormente por

$$z = 1$$

e inferiormente por

$$x^2 + y^2 - z = 0.$$

a) (1.5 ponto) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S que limita V orientada para fora usando o Teorema da Divergência.

b) (1.5 ponto) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S que limita V orientada para fora através de uma integral direta sobre a superfície e usando parametrizações adequadas.

Solução do item a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2z$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iiint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\rho^2}^1 2z\rho dz d\rho d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho \left.(z^2)\right|_{\rho^2}^1 2zdzd\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho(1-\rho^4) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^5) d\rho \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Solução do item b Dividimos a superfície em duas porções: S_t é o topo, isto é, um círculo de raio 1 em $z = 1$, e S_b é a base, isto é, uma porção de paraboloide.

$$\Phi = \Phi_t + \Phi_b$$

onde

$$\begin{aligned}
\Phi_t &= \iint_{S_t} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iint_{S_t} (z^2\vec{k}) \cdot \vec{k} dS \\
&= \iint_{S_t} dS \\
&= \pi \quad \text{(área do círculo)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_b &= \iint_{S_b} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= -\iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA
\end{aligned}$$

onde $G(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ e

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G = z^2$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\Phi_b &= -\iint_A (z^2) dA \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 z^2 \rho d\rho d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^5 d\rho d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\Phi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

• **Questão 3** (3.0 pontos) Considere o caminho C dado pela triângulo de vértices $P_1(0,0,0)$, $P_2(0,1,0)$ e $P_3(0,1,1)$ no sentido $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$. Calcule o valor da circulação de $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + e^x yz\vec{j} + \vec{k}$ ao longo de C.

a. Usando o teorema de Stokes

b. Usando uma parametrização direta da curva

Solução do item a: O caminho C é um triângulo no plano $x = 0$ com normal dada por $\vec{n} = \vec{i}$.
Usando o teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} W &:= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &:= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

Aqui

$$\vec{i} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & e^x yz & 1 \end{vmatrix} = -e^x y$$

Assim a integral no plano $x = 0$ se reduz a:

$$\begin{aligned} W &:= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &:= \iint_S (-y) dS \\ &= -\int_0^1 \int_0^y y dz dy \\ &= -\int_0^1 y \int_0^y dz dy \\ &= -\int_0^1 y^2 dy = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Solução do item b: A integral de linha é escrita como a soma das integrais em cada aresta do triângulo:

$$W = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Aresta $P_1 \to P_2$:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= t\vec{j}, \quad 0 \le t \le 1. \\ \vec{r}'(t) &= \vec{j}. \\ W_1 &:= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^1 e^x yz dt = 0 \end{aligned}$$

Aresta $P_2 \to P_3$:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \le t \le 1. \\ \vec{r}'(t) &= \vec{k}. \\ W_2 &:= \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^1 1 dt = 1 \end{aligned}$$

Aresta $P_3 \to P_1$:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (1-t)\vec{j} + (1-t)\vec{k}, \quad 0 \le t \le 1. \\ \vec{r}'(t) &= -\vec{j} - \vec{k}. \\ W_3 &:= \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_0^1 \left(e^x yz + 1\right) dt \\ &= -\int_0^1 \left((1-t)^2 + 1\right) dt \\ &= -\int_0^1 \left(2 - 2t + t^2\right) dt \\ &= -\left(2 - 1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Assim

$$W = 0 + 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$